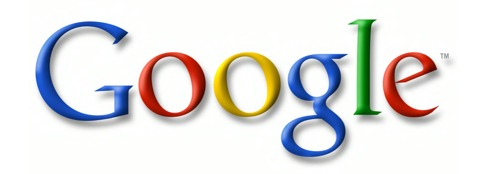



SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS





ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.
BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR. XI. HEFT.

EUCLID

UND DIE SECHS PLANIMETRISCHEN BÜCHER.

MIT BENUTZUNG DER TEXTAUSGABE VON HEIBERG.

VON

DR. MAX SIMON
STRASSBURG I. ELS.

MIT 192 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.

Mitteilung.

Von dem vorliegenden Hefte ab werden die von MORITZ CANTOR begründeten Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften nicht mehr als Supplement zur Schlömilch'schen Zeitschrift für Mathematik und Physik, die von 1901 ab lediglich als Organ für angewandte Mathematik dienen wird, herausgegeben, sondern erscheinen als selbständiges Unternehmen.

Die unterzeichnete Verlagsbuchhandlung bittet die Herren Fachgelehrten um freundliche weitere Unterstützung dieser Abhandlungen durch Einsendung geeigneter Beiträge. Umfangreichere Arbeiten werden wie bisher Hefte für sich bilden, während kleinere Beiträge in Sammelbänden vereinigt werden.

Leipzig.

B. G. Teubner.

JOHANNA SIMON

GEB. BURG

IN TREUER LIEBE GEWIDMET.

a*

Vorwort.

Da ich nun einmal in Baumeister's Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre die Mathematik bearbeitet habe, — wenngleich, wie mein hochverehrter früherer Chef bezeugen wird, ich hier, wenigstens für die Realschulen, erst eingetreten bin, nachdem eine Reihe anderer, ich nenne Bertram und Lampe, abgelehnt hatten — so erfordert es die Konsequenz, dafs ich gewissermafsen als Fortsetzung und Abschlufs meiner Methodik und Didaktik die Lehrer auf den erhabenen Meister aller mathematischen Pädagogik hinweise, der, in Deutschland wenigstens, in eine ganz unverdiente Vergessenheit geraten ist. Man mag über die verschiedenen Arten der 9-klassigen Lehranstalten und ihre Berechtigungen denken, wie man will, und ebenso über die Notwendigkeit des griechischen Unterrichts und der Verba auf *μι* in den höheren Schulen, aber ein Unterricht an irgend einer dieser Anstalten, der nicht ganz und gar von hellenischem Geist durchtränkt ist, ist für die Geistes- und Herzensbildung keinen Schufs Pulver wert. Und das gilt ganz besonders für die Mathematik, die ja jetzt auch noch die philosophische Propädeutik ersetzen mufs, wenn sich auch, wie ich erst vor kurzem ausgesprochen, zur Zeit die Neigung zeigt, die Mathematik nicht etwa von dem „praktischen" Standpunkt des Architekten und Ingenieurs, sondern von dem noch praktischeren des Maurerpoliers und Zimmergesellen zu betreiben. Da wird die Trigonometrie zerrissen und auf drei verschiedene Klassen verteilt, der Binom auf ganze Potenzen, wo er zwecklos ist, beschränkt; da wird in der Kl. II den Schülern ein buntscheckiges Sammelsurium von Brocken vorgeworfen, der Untersekundaner wird auf Logarithmenaufschlagen dressiert, und der gymnasiale Primaner soll mit Storchschnabel und Rechenschieber handwerkern.

Von einem wirklichen Einblick in den Zusammenhang der Elementarmathematik kann und soll nicht die Rede sein. In den Real- und noch mehr in den Oberrealschulen, am meisten aber in dem berühmten sogen. Reform-Gymnasium wird gerade den jüngern Schülern der für Knaben so schwer verdauliche Stoff in einer Fülle zugeführt, die bei der grofsen Menge nur Ekel erzeugen kann. Vier Stunden reiner Mathematik in allen Klassen aller höheren Lehranstalten sind nötig, aber auch hinreichend.

Nach mehr als dreifsigjähriger Lehrthätigkeit kann ich nur sagen, es giebt für die Geometrie, wenn ein propädeutischer Unterricht in der Quarta vorausgegangen ist, keinen besseren Lehrgang als den des Euclid, wenn der Lehrer den Einblick in den so durchsichtigen als einfachen Aufbau der Elemente sich angeeignet hat, und den Schülern diesen Aufbau genetisch klar machen kann.

Was die Herausgabe selbst betrifft, so habe ich die Definitionen, Petita, Axiome so wörtlich als möglich übersetzt; Zusätze meinerseits durch eckige Klammern gekennzeichnet und unübersetztes aus dem Euclid durch runde. Von den Beweisen und Konstruktionen sind nur die wichtigsten wortgetreu. Die Breite der Darstellung, welche bei Euclid angebracht ist, da es sich um ein Kollegienheft zum mündlichen Vortrag handelt, wobei die Wiederholung des Resultats nötig, ist beim Druck, um mit Saccheri zu reden, ein Makel, und ich glaubte, wie schon Lorenz und Mollweide gethan, den Euclid „von jedem Makel befreit“ edieren zu sollen. Soviel wie möglich habe ich für das erste Buch Proclus ausgenutzt, es stand mir aufser dem griech. Text von Friedlein nur die lat. Übersetzung des Barocci von 1560 zu Gebote, die gerade in allen kritischen Fällen nur Worte giebt.

Sollte diese Herausgabe die Lehrerwelt, die der Hochschulen eingeschlossen, für das Studium des Euclid und der griech. Geometrie interessieren, so wäre ihr Zweck erreicht.

Strafsburg, 30. Juni 1900.

Max Simon.

Inhaltsübersicht.

§ 1.

Biographisches.

Von dem Verfasser des Werkes, das unter allen mathematischen Schriften auf das Geistesleben der Menschheit den weitaus gröfsten Einflufs gehabt, ist nicht einmal der Ort und die Zeit seiner Geburt und seines Todes bekannt. Seinen Zeitgenossen und der nächstfolgenden Generation war Euclid schlechtweg der „Stoicheiótes", der Verfasser der Elemente, und bald ging die Kunde seiner Personalien verloren. Viele Jahrhunderte hindurch ist er mit dem Philosophen Euclid von Megara verwechselt worden, der nach dem Tode des Sokrates dessen Schule zusammenhielt, und dieser Irrtum findet sich schon bei Valerius Maximus um 30 n. Chr. und ist dort aus einer falschen Auffassung einer Stelle bei Geminus (im Proclus Friedl. S. 68) entstanden.

Das Wenige, was wir von ihm wissen, verdanken wir einer Stelle bei Proclus, der etwa um 450 n. Chr. einen uns erhaltenen Kommentar zum 1. Buch der „Elemente" verfafste (Friedlein S. 68): „Nicht viel jünger als diese (Hermion und Philippos, der Schüler Platons) ist Euclid, der die Elemente (Stoicheia) verfafste, wobei er vieles, was von Eudoxos herrührt, in systematischen Zusammenhang brachte, vieles, was Theätet begonnen, vollendete und aufserdem vieles, was früher ohne die nötige Strenge bewiesen wurde, auf unantastbare Beweise zurückführte. Es hatte aber der Mann seine Blütezeit unter Ptolemaios dem ersten. Denn Archimedes, dessen Lebenszeit sich an die des ersten Ptolemaios anschliefst, erwähnt des Euclid [Arch. peri sph. kai ky. Heiberg I, 2 p. 14], und zwar erzählt er: Ptolemaios frug einmal den Euclid, ob es nicht einen bequemeren Weg zur Geometrie gäbe, als den durch die „Elemente". Jener aber antwortete: Zur Geometrie giebt es für Könige keinen Privatweg. Er ist also jünger als die

[unmittelbaren] Schüler des Platon und älter als Eratosthenes und Archimedes."

Demnach ergiebt sich für Euclid etwa 300 v. Chr. als Zeit seines Mannesalters. Zur Charakterisierung des Euclid haben wir noch eine Stelle bei Stobaios, welche Heiberg (Litteraturgesch. Studien über Euc. Leipz. 1882) anführt: Jemand, der angefangen hatte, bei Euclid Geometrie zu treiben, frug, nachdem er den ersten Satz (der Elemente) gelernt hatte, was habe ich nun davon, dafs ich das gelernt habe. Euclid rief seinen Sklaven und sagte: Gieb ihm 3 Obolen, da er lernt, um Profit zu machen.

Die Stellen zeigen uns, dafs Euclid in der Tradition seines Volkes als ein hochgesinnter, rein der Wissenschaft hingegebener Mann lebte.

§ 2.

Die Schriften des Euklid aufser den Elementen.

Wir geben zunächst eine Besprechung der Schriften des Euclid, wie sie teils von Proclus, teils von Pappus, dem Verfasser der für die Hellenische Mathematik und ihre Geschichte so wichtigen Kollektaneen, erwähnt werden, und folgen dabei im wesentlichen dem dänischen Gelehrten Heiberg, von dem die letzte und zur Zeit mafsgebende Ausgabe der „Elemente" herrührt.

Im griechischen Urtext sind erhalten: a) die Dedomena (lat. Data), Gegebenes, mit einer Vorrede des Marinus von Neapolis in Palästina, einem Schüler des Proclus. Die Echtheit des Textes wird durch die Inhaltsangabe bei Pappus (300 n. Chr.) bestätigt, welche im wesentlichen mit dem Text der Codices übereinstimmt. Die Schrift enthält 95 Sätze (Pappus 90), welche aussagen, dafs, wenn gewisse geom. Gebilde gegeben sind, andere dadurch ebenfalls gegeben sind; also eine Art geom. Funktionentheorie. Beispiele Satz 2: Wenn eine gegebene Gröfse zu einer zweiten ein gegebenes Verhältnis hat, so ist die zweite ebenfalls gegeben.

S. 33. In einem gegebenen Streifen ist durch die Winkel, welche eine Querstrecke mit den Grenzen bildet, die Länge der Querstrecke gegeben.

Dem Inhalt nach gehen die Data nicht über die „Elemente" hinaus, doch war eine solche Zusammenstellung praktisch im hohen Grade wertvoll für die Anwendung der seit Platon sich immer mehr aus-

breitenden analytischen Methode, deren Wesen gerade darin besteht, die durch die gegebenen Stücke mitbestimmten Punkte, Linien, Figuren aufzusuchen, bis man zu einer konstruierbaren Nebenfigur gelangt. Die Data sind daher eine eng an die Elemente sich anschliefsende Anleitung zum Konstruieren nach der analytischen Methode, etwa entsprechend unserm Petersen.

Erhalten ist unter dem Titel „Phänomena“ eine Schrift über Astronomie mit den Anfangsgründen der Sphärik. Die Schrift zeigt wesentliche Fortschritte gegenüber dem unmittelbaren Vorgänger, dem Autolycos. Sie beginnt mit dem Satz: „Die Erde liegt in der Mitte der Welt und vertritt in Bezug auf dieselbe die Stelle des Mittelpunktes“ und schliefst mit dem 18. Satz: „Von zwei gleichen Bogen des Halbkreises zwischen dem Aquator und dem Sommerwendekreis durchwandelt der eine, beliebig genommen, in längerer Zeit die sichtbare Halbkugel, als der andere die unsichtbare.“ Das Wort „Horizont“ stammt aus der Schrift, welche von Pappus im 6. Buch der Sammlung erläutert und ergänzt wurde (A. Nokk, deutsche Übersetzung im Programm von Freiburg i. Breisg. 1850). Heiberg hat, was schon Nokk bemerkt, eingehend bewiesen, dafs die Schrift des Euclid einen sehr wesentlichen Bestand der für unsere Sphärik grundlegenden Schrift des Theodosius (von Tripolis, etwa 100 v. Chr.) gebildet hat.

Echt Euclidisch ist auch nach der Wiederherstellung des griechischen Textes von Heiberg die Schrift „Optica“, deren gewöhnlicher Text (nach Heiberg) auf ein Kollegienheft nach Theon (dem Vater der Hypatia) zurückgeht. Die Schrift gehörte zu der Sammlung, welche unter dem Titel „Mikros Astronoumenos“ (der kleine Astronom) neben den „Elementen“ das Rüstzeug des Astronomen bildete, ehe er an das grofse Kompendium des Ptolemaios, den Almagest (megale syntaxis) gehen konnte. Die Schrift giebt die Anfangsgründe der Perspektive. Unecht dagegen ist die andere Schrift über Optik, welche unter Euclids Namen gedruckt wurde, die Katoptrik. Heiberg macht es im hohen Grade wahrscheinlich, dafs die von Proclus unter diesem Titel erwähnte Schrift des Euclid rasch durch das bedeutendere Werk des Archimedes über den gleichen Gegenstand verdrängt wurde.

Noch über einen andern Zweig der angewandten Mathematik haben wir eine Schrift des Euclid, die Katatome kanonos, die Lehre von den musikalischen Intervallen, 20 Sätze, wissenschaftlich auf dem Standpunkte der Pythagoräer, der Erfinder des Monochords.

Die zweite musikalische Schrift, die unter dem Namen des Euclid geht, die Einleitung in die Harmonielehre (Eisagoge harmonice), rührt,

1*

wie schon Joh. Grotius 1599 erkannte, von dem Aristoxenianer Kleionides her. —

Aus arabischen Quellen ist uns durch Dee 1563 eine Bearbeitung und durch Woepcke 1851 eine Übersetzung der von Proclus an zwei Stellen erwähnten Schrift des Euclid „über Teilungen" (peri diaireseōn) erhalten. Die Schrift (Inhaltsangabe bei Heiberg l. c.), an zwei Stellen von Proclus erwähnt, enthielt wichtige Aufgaben über Flächenteilungen, so die noch im Unterricht stets vorkommende Teilung des Dreiecks durch Gerade von gegebener Richtung in Teile, die ein gegebenes Verhältnis haben, Teilung von Vierecken, von Kreisen, von Figuren, die von Kreisbogen und Geraden begrenzt sind. Werden auch keine andern Sätze benutzt, als solche, die in den Elementen vorkommen oder sich mühelos an die Sätze der Stoicheia anschliefsen, so zeigen sie doch Euclid als einen sehr bedeutenden Konstrukteur. Verloren sind die Schriften des Euclid, welche sich auf die eigentliche höhere Mathematik seiner Zeit bezogen. Zunächst die zwei Bücher „topoi pros epiphanaia", Oberflächen als geometrische Orte, die Proclus und Pappus erwähnt. Was ein geometrischer Ort ist, wird schon von Proclus gerade so wie heute definiert: die Gesamtheit aller Punkte, denen ein und dieselbe bestimmte Eigenschaft (Symptom) zukommt; und jenachdem diese Gesamtheiten eine Linie oder Fläche bilden, heifsen sie Linien- oder Flächenorte. Die Schrift des Euclid scheint nach Angaben des Pappus wesentlich die Ortseigenschaften der Cylinder-Kegel- (und Kugel-)Fläche behandelt zu haben. Sie scheint in der bedeutenden Arbeit des Archimedes über Konoide und Sphäroide aufgegangen zu sein.

Mehr wissen wir von den drei Büchern „Porismata", von denen uns durch Pappus die Inhaltsangabe erhalten ist, so dafs der grofse französische Geometer Chasles eine Rekonstruktion versucht hat. Es wäre möglich, dafs aus arabischen Manuskripten, von denen besonders in Leyden noch eine grofse Anzahl der Entzifferung harrt, eine Kritik dieser Rekonstruktion möglich wird. Das Wort „Porisma" selbst bildet noch eine Streitfrage. Es hat zwei Bedeutungen: erstens Zusatz, so kommt es vielfach in Handschriften der Elemente vor; zweitens aber bedeutet es ein Mittelding zwischen einem gewöhnlichen Lehrsatz und einem sogenannten Ortssatz, d. h. einem Satze, der ausspricht, dafs eine bestimmte Kurve eine bestimmte Eigenschaft hat, wie z. B. der Satz: Der Ort der Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten ein festes Verhältnis haben, ist der Kreis (des Apollonius), dessen Durchmesser die beiden in diesem Verhältnis zu den gegebenen harmonischen ver-

bindet. Ein Porisma wäre demzufolge in der Geometrie das Analogon dessen, was wir in der Arithmetik einen Existenzbeweis nennen, es spräche aus, dafs ein bestimmter Ort existiert, ohne ihn direkt zu konstruieren. Die Porismata bildeten vermutlich das Seitenstück für die synthetische (direkte) Konstruktionsmethode zu den Daten als Hilfsmethode für die analytische Methode (vgl. aber S. 41). Nach den Proben bei Pappus gingen sie weit über die Elemente hinaus, und mit Chasles und Zeuthen müssen wir annehmen, dafs sie die Grundlage zu der projektiven Behandlung der Kegelschnitte enthielten.

Auch über diese zur Zeit des Euclid höchste Mathematik hat Euclid geschrieben, vier Bücher konika. Ebenso wie die Elemente des Euclid die Arbeiten seiner Vorgänger benutzten und verdrängten, wurde auch diese Schrift, Zeuge ist Pappus, von dem grofsartigen Werk der acht Bücher Konika des Apollonius verdrängt, in dessen ersten vier Büchern sie vermutlich ganz Aufnahme gefunden hat. Sie wird daher auch schwerlich aus arabischen Quellen je zum Vorschein kommen, und ist, wenn sie nicht etwa zufällig, z. B. als Einwickelung einer ägyptischen Mumie, gefunden wird, hoffnungslos verloren.

Verloren ist auch eine Schrift mathem. philos. Inhalts „über Trugschlüsse“ (pseudaria), nach der Aussage des Proclus zur Geistesgymnastik der Schüler bestimmt.

Diese Schüler sind, was zu wenig beachtet wurde, Studenten, reife Männer gewesen. Euclid hat den Schwerpunkt der Mathematik von Athen weg, wo er selbst bei den Schülern des Platon und Eudoxus seine Bildung holte, nach Alexandrien verlegt, Archimedes und Apollonius haben in der Euclidischen Schule gelernt. Unsere Übersicht zeigt, dafs der um die Geschichte der Mathematik so hoch verdiente Moritz Cantor mit Recht Euclid nebst jenen beiden zu den drei grofsen griechischen Mathematikern zählt, welche die Blüte hellenischer Mathematik im dritten Jahrhundert herbeiführten.

Wir wenden uns nun zu den „Elementen“.

§ 3.

Die Elemente (*στοιχεῖα*).

Den 13 Büchern der Elemente des Euclides wurden schon früh zwei Bücher angehängt. Das 14. ist eine tüchtige Arbeit des in

Alexandrien etwa 150 v. Chr. lebenden Mathematikers und Astronomen Hypsikles über die fünf regulären Körper, dessen Wichtigstes der Beweis des Apollonischen Satzes ist: Die Umkreise der Seitenflächen des regulären Ikosaeders und Dodekaeders derselben Kugel sind gleich. Das 15., früher oft ebenfalls dem Hypsikles zugeschrieben, ist eine weit schwächere Arbeit, nach Tannery und Heiberg hat sie einen Schüler des Erbauers der Sophienkirche, Isidorus (um 530 n. Chr.), zum Verfasser.

Den Zweck der Elemente giebt Proclus S. 72 an: Elemente nennt man das, dessen Theorie hinreicht zum Verständnis von allem anderen, und mittelst dessen man imstande ist, die Schwierigkeiten, welche das andere bietet, aus dem Wege zu räumen. Stoicheion bedeutet eigentlich Buchstabe, und l. c. sagt Proclus geradezu: Die Elemente enthalten die Sätze, die als Bestandteile alles folgenden auftreten, wie die Buchstaben im Wort. Die Grundbedeutung von Stoichos ist militärisch, es bedeutet das, was wir einen Zug nennen, also auch da die Grundlage der Formation.

Etwas früher sagt Proclus: „Der Zweck ist, den Schülern behufs Verständnis des ganzen (der Geometrie) die Grundlage zu liefern und die einzelnen Konstruktionen der kosmischen Körper zu geben." Die kosmischen Körper sind die fünf regulären Körper, sie bilden den Schlufs, aber nicht den Zweck der Elemente; Kästner (Anfangsgr. 7. 1 S. 455, 5. Aufl.) sagt dazu: „es hat noch niemand gesagt, das Pantheon zu Rom sei seines Doms [Kuppel] wegen gebaut". Der Zweck ist nie verkannt, und das „καὶ" der Proclusstelle ist mit sogar zu übersetzen. Die Schüler sind durch die Elemente so weit zu fördern, dafs sie sogar die Konstruktionen der fünf Körper verstehen und, setze ich hinzu, ein Gefühl für die Grofsthat bekommen, mit der die Elemente schliefsen, den Nachweis, dafs es mehr als die fünf Körper nicht geben kann.

Der Zweck und die Notwendigkeit der Elemente folgt ohne weiteres aus der geschichtlichen Entwickelung der hellenischen Mathematik. In der Schule des Pythagoras erwuchs aus den Handwerksregeln ägyptischer Feldmesser und Baumeister im 5. Jahrh. n. Chr. die Geometrie zu einer Wissenschaft; es gelang den Pythagoräern in geometrischer Einkleidung die allgemeine Lösung der quadratischen Gleichung, damit aber auch entdeckten sie (an der Seite und Diagonale des Quadrats) die Irrationalzahl bezw. die Möglichkeit, bezw. Wahrscheinlichkeit, der Inkommensurabilität (Mangel vom gemeinsamen Mafs) zweier Strecken. Damit wurden alle früheren Beweise über Flächenmessung, Ähnlichkeit etc. hinfällig. Das 4. Jahrhundert, Platon und der als Mathematiker

ihn überragende Eudoxus von Knidos und Theätet widmen sich der methodischen Arbeit, die neuen Grundlagen festzustellen; von Eudoxus rührt das fünfte Buch der Elemente, die Lehre von den Proportionen her, er ist vermutlich der eigentliche Schöpfer der Exhaustionsmethode, die sich später unter den genialen Händen des Archimedes (und Apollonius) zur antiken Differentialrechnung auswuchs, und von Theätet wissen wir, dafs er die Einteilung der Irrationalzahlen, die den Inhalt des zehnten Buches ausmachen, begonnen hat. Nach einem Jahrhundert waren die methodischen Arbeiten zum Abschlufs reif, und den gab Euclid.

Die Aufgabe, die er sich setzte, auf Grund der notwendigsten Voraussetzungen, in unantastbarer Weise die Geometrie und in geometrischer Einkleidung auch die Algebra als ein zusammenhängendes Ganze darzustellen, hat er in einer Weise gelöst, die alle Vorgänger spurlos verschwinden liefs und niemals übertroffen wurde.

Daran schliefst sich die Frage: inwieweit Euclid in den Einzelheiten der Elemente eigenes gab. Die Frage ist nur summarisch zu beantworten. Cantor sagt: „Ein grofser Mathematiker wird auch da, wo er anderen folgt, seine Eigentümlichkeit nicht verleugnen, und so war es sicherlich auch bei Euclid.“ Gewifs, denn so ist es ja bei jedem Schullehrer, der seine Elemente gedruckt oder ungedruckt traktiert. Als gesichert ist durch Proclus (Friedlein S. 426) der Beweis des Pythagoras und die Verallgemeinerung auf beliebige ähnlichen Figuren. Derselbe Proclus sagt uns (Knoche, Programm Herford 1865), dafs das so bedeutende fünfte Buch des Eudoxus Eigentum sei, und Archimedes (Quadr. parab.) vindiciert eben diesem den Exhaustionsbeweis und die Berechnung der Pyramide. Dafs das zehnte Buch zum Teil dem Theätet gehört, wissen wir auch durch Proclus. Cantor, Heiberg und mit ihnen jeder Unbefangene sind auch der Meinung, dafs die eigentümliche Form des Vortrags die (schon von den Ägyptern) überkommene gewesen mit den so berühmten Schlufsformeln: „Was zu beweisen war (ὅπερ ἔδει δεῖξαι)“ und „Was zu thun war (ὅπερ ἔδει ποιῆσαι).“ Euclid gehören wohl vor allem die Auswahl und die Form der Definitionen, Forderungen (Voraussetzungen) und Grundsätze, dann die strenge Anordnung der Sätze nach dem Prinzip, dafs kein früherer Satz mittelst eines späteren bewiesen, kein Gebilde gebraucht wird, dessen Existenz nicht vorher durch geforderte oder gegebene Konstruktion gesichert ist; dann ein grofser Teil des zehnten Buches, die Vollendung der Einteilung der Irrationalitäten durch Theätet. Dem Euclid gehört der elementare Beweis (ohne Exhaustion bezw. Integralrechnung) des Satzes, dafs die

Pyramide gleich dem dritten Teil des Prisma, das mit ihr gleiche Grundlinien und Höhe hat; ferner viele Sätze des dreizehnten Buches über die Bestimmung von Stücken der regulären Körper und mit gröſster Wahrscheinlichkeit der schon erwähnte Schluſssatz. Etwa um 420 war das Dodekaeder gefunden, wenig früher war überhaupt das logische Element in der Geometrie, die Forderung nach dem Beweis, erst aufgetreten, die Ausbildung des logischen Sinnes bis zum Bedürfnis eines solchen Existenzbeweises erfordert sicher ein Jahrhundert. Der einzige, der noch in Frage kommen könnte, wäre Eudoxus.

§ 4.

Zur Bibliographie der Elemente

Kaum dürfte je ein anderes Buch, von der Bibel abgesehen, in so viel Auflagen und Bearbeitungen verbreitet gewesen sein, als die 13 „Biblia“ des Euclid, dessen Namen geradezu mit der Geometrie identifiziert wurde, z. B. Älian: Die Spinnen ziehen ihren Kreis genau und eines Euclid bedürfen sie nicht. Im Mittelalter heiſst die Professur der Geometrie sehr häufig Professur des Euclid. Die Studenten lasen den Euclid, sei es vollständig, sei es im Auszug, und der Professor kommentierte, wobei selten mehr als das erste und zweite Buch erledigt wurde. Savile, der die nach ihm genannte, noch heute in Oxford bestehende Professur des Euclid stiftete, kam bis zum achten Satz des ersten Buches. Auf dem Titel bezeichnen sich die Professoren als Professoren der Arithmetik und des Euclid, so z. B. Scheibl 1555. Noch heute heiſst in der englischen Schulsprache die Mathematik einfach „Euklid“.

Es war selbstverständlich, daſs der Text im Laufe der Jahrhunderte entstellt, verdorben, aber auch erweitert wurde; letzteres besonders für die schwierigen bezw. zur Zeit des Euclid „modernen“ Teile des zehnten und des zwölften und dreizehnten Buches.

Eine Bearbeitung ist besonders wichtig, die des Theon, des Vaters der Hypatia, der zur Zeit Theodosius des Groſsen, also etwa 350 n. Chr. in Alexandria lebte und lehrte. Savile macht in seiner Vorlesung (Praelect. tresdecim in principia elementor. Euclidis Oxf. 1621) auf eine Stelle in Theons Kommentar zum Almagest aufmerksam, die schon Petrus Ramus, der auch die Wichtigkeit von Proclus erkannt hatte, erwähnte: „Daſs sich die Sectoren gleicher Kreise wie

ihre Zentriwinkel verhalten, wurde von uns in der Euclidausgabe am Schlufs des sechsten Buches gezeigt.“ Diese Ausgabe, etwa 400 n. Chr., mufs die früheren im Buchhandel fast völlig verdrängt haben, obwohl sie, wie wir jetzt wissen, eine Verschlechterung gewesen. Alle bekannten Codices, und ihre Zahl ist sehr grofs, alle Drucke und Übersetzungen bis 1800 sind aus dieser Ausgabe hervorgegangen, wenn man von arabischen Quellen absieht. Peyrard, dem wir die erste im heutigen Sinne kritische Ausgabe des Euclid (griechisch, lateinisch, französisch) verdanken, fand 1808 dank der Beraubung aller Bibliotheken, Museen etc. durch Napoleon in einer dem Vatikan entnommenen Handschrift 190 (1814 zurückgegeben), die bis jetzt einzige auf eine Ausgabe, die älter ist als Theon, zurückgehende vollständige Handschrift.

Aus diesem Codex konnte man die Änderungen des Theon feststellen, und auch die Theonschen Codices ihrem Werte nach beurteilen, eine Arbeit, welche für die Elemente von Heiberg in bewunderungswerter Weise geleistet ist.

Auf doppeltem Wege drang die Kenntnis des Euclid im Mittelalter nach Europa. Einmal sind es die von oder nach Boetius (etwa 500) verfafsten dürftigen Auszüge der Elemente, welche sich in den Klöstern hielten und besonders durch Gerbert von Wichtigkeit wurden, dann aber sind es die Übertragungen der arabischen Übersetzungen und Bearbeitungen ins Lateinische. Über den arabischen Euclid hat uns der durch einen unglücklichen Sturz der Wissenschaft zu früh entrissene Schüler von Nöldecke und Landauer, Klamroth, Gymnasiallehrer in Altona, aufgeklärt, Zeitschrift der Deut. Morgenl. Ges. 1881: „Die beiden berühmtesten Übersetzungen sind die des Haǵǵâǵ (spr. Hadjadsch) ibn Iûsuf ibn Maṭar aus dem Anfange und die des Isḥâq ibn Ḥunein aus dem Ende des 9. Jahrh.; jene ist uns teilweise, diese ganz und zwar in mehreren Handschriften erhalten. Die grofsenteils ungünstigen Beurteilungen des arabischen Euclid in den Geschichten der Mathematik beziehen sich nicht auf diese Handschriften, von denen bisher nichts veröffentlicht ist, sondern auf zwei gedruckte Bücher, von denen das eine eine spätere arabische Überarbeitung der ältesten Übersetzungen, das andere eine lateinische Übertragung des arabischen Euclid enthält. Die erstere hat zum Verfasser den Naṣîr ed-dîn (†1273) aus Ṭûs in Chorâsân und erschien im Jahre 1594 zu Rom. Der letztere wird dem Giovanni Campano aus Novara zugeschrieben, der um die Mitte des 13. Jahrh. gelebt haben mufs; sie erschien im Jahre 1482 bei Erhard Ratdolt in Venedig als erste Euclid-Ausgabe.“

Nach Klamroth ist der Euclid des Haggag die erste Übersetzung eines griechischen Werkes ins Arabische, die des Ishaq, welche uns nur in der Form vorliegt, wie sie von Thâbit ibn Quorra verbessert ist, „ein Muster von guter Übersetzung eines mathematischen Textes“. Wir müssen fortab annehmen, dafs diesen Arabern ein dem ursprünglichen Werke des Euclid viel näherstehender Text, der etwa nur drei Viertel des jetzigen enthielt, vorlag. Klamroth schliefst:

1) Alle Lemmata und Scholia, der Excurs hinter XIII, 5, die meisten Porismata und zweiten Beweise, 22 Sätze, 17 Definitionen in unserer Ausgabe rühren nicht von Euclid her, sondern sind sehr späte Zusätze.

2) Bei den meisten Sätzen, aufser etwa in Buch 7—9, sind einzelne kleinere, begründende, erklärende, zurückverweisende und weiter ausführende Glossen in den Text gedrungen.

3) Nicht wenige Sätze, besonders in Buch 10 und 11—13, hatten früher einen weit kürzeren, einfacheren bezw. unvollkommeneren Beweis, der erst in späterer Zeit erweitert und vervollständigt wurde.

Aber Heiberg beweist (Cantor 29), dafs den Arabern verstümmelte griechische Handschriften nach Art der des Demetrius Cydonius (zu Bologna) aus dem 11. Jahrh. vorlagen, und dafs griechische Handschriften, wie der Vaticanus 190 und der Palimpsest aus dem 7. oder Anfang des 8. Jahrh. (B. M. 17211) auf ältere Quellen zurückgehen. Die Unechtheit der mit ἄλλως bezeichneten zweiten Beweise ist schon von August bemerkt worden. Wenn auch die lat. Vorrede zu Nasur nichts mit Thâbit zu thun hat, so hat doch Heiberg völlig recht, wenn er die Willkürlichkeit der arabischen Übersetzer hervorhebt. Noch 1740 in der 4.? Auflage übersetzt der deutschredende Eucl. d. h. v. Pirckenstein die vierte Def. wie folgt:

„Eine gerade Linie ist, welche Schnur — eben, zwischen zwei Punkten liegt“ oder „eine gerade Linie ist die kürzeste unter allen, welche aus einem Punkt in einen andern möge gezogen werden“ (Fig. IV).

Die Bearbeitung Tusis ist nach Heiberg 1801 zum zweiten Male in Konstantinopel gedruckt (nach Riccardi 4. Aufl.), sie ist auch für die Parallelentheorie wichtig.

Die ältesten uns erhaltenen lateinischen Übersetzungen gehen beide wahrscheinlich (oder nach Heibergs neuester Arbeit fast sicher) auf eine und dieselbe arabische Bearbeitung zurück, die bis jetzt unbekannt ist; es sind die des Atelhard von Bath um 1120 und die des Campano etwa 1250. Seine Zusätze zeigen ihn als einen tüchtigen Mathematiker (wie Tusi), seine Ausgabe ist auf lange Zeit mafsgebend und 1482

ward sie von dem Augsburger Ratdold gedruckt. Der Titel der sehr seltenen Ausgabe lautet Praeclarissimus liber elementorum Euclidis perspicassimi In artem Geometrie incipiet quam felicissime; sie ist von Kästner genau beschrieben (Gesch. d. Math. Bd. I S. 289 etc.).

Im Beginne der Renaissance wird dann die Existenz griechischer Codices und ihrer Abweichungen von Campanus offenkundig, und so gab 1500—1505 der Venetianer Zamberti den Euclid zum ersten Male vollständig nach griechischem Codex lateinisch heraus. Eu. oper. ed. a Bartolemaeo Z. folio. Gegen diese Ausgabe veröffentlichte 1509 Lucas Paciuolo, der durch seine „summa“ für die Arithmetik epochemachend ist, eine Verbesserung des Campanus, ebenfalls bei Ratdold (ist ist die seltenste E.-Ausgabe, Kästner l. c. S. 299—301). Zamberti hielt noch an dem Irrtum fest, dafs die Sätze vom „Megarenser“ Euclid, die Beweise vom Alexandriner Theon seien. Seine Arbeit, verbunden mit der des Campanus, wird durch den Pariser Druck Lefêvre's (Faber, Mich. Pontanus) 1516 und durch Herwagens Baseler Nachdrucke (unwesentliche Verbesserungen von Herlin) 1537, 1546, 1558 sehr verbreitet und hat 300 Jahre lang den Markt beherrscht, obwohl nach Heiberg der Codex des Zamberti zu den schlechteren Theonischen gehörte.

Von lateinischen Übersetzungen wollen wir nur noch die hervorragendsten erwähnen, die des Commandinus, Pisa 1572, der zuerst die Persönlichkeit unseres Euclids feststellte, und die des Clavius mit Kommentar 1574, „welche ganz durchzustudieren viel Geduld erfordert, aber desto nützlicher ist“. Zitat aus Scheibel, Anleitung zur mathematischen Bücherkenntnis, Breslau 1769, 2. Aufl. 1772, 1781?, wo sich eine Übersicht aller Euclidausgaben findet; von da ab vgl. Kaiser bis 1888 und seine Fortsetzung Hinrichs bis heute für Deutschland.*) Die Arbeit des für seine Zeit hochbedeutenden Jesuiten Clavius ist von allen Historikern der Mathematik gleich gewürdigt, von Montucla, Kästner, Cantor; Kästner nennt sie die Pandekten der Mathematik, aber die 22 Ausgaben, welche Engel und Stäckel in der anerkannten meisterhaften „Theorie der Parallellinien“ angeben, habe ich nicht her-

*) Die umfassendste Zusammenstellung findet sich in den Mem. del. B. Acad. d. Sc. d. Inst. di Bologna Serie IV s. VIII und IX, VII. 1887—1890. Sie ist das hochverdienstliche Werk Riccardi's (Bonola zählt gegen 1700 Ausgaben), leider freilich, wie ich für Deutschland konstatieren konnte, ist sie nicht absolut sicher, was in der Natur der Sache liegt. (So existiert z. B. eine Ausgabe des Lorenz für Deutschland von 1819 nicht, obwohl Kaiser sie angiebt, bei dem 1818 fehlt etc.)



ausbringen können, vielleicht zählt Stäckel die Ausgaben der Ordensbrüder, Grünberger (und Tacquet), mit.

Zu Basel erschien 1533 bei Herwagen, der auch in Strafsburg eine Druckerei besafs, die erste griechische Textausgabe durch Simon Grynaeus (den älteren); leider nach zwei sehr schlechten Handschriften. Das erste und zweite Buch wurde von dem hervorragenden Mathematiker des Sturmschen (Protest.) Gymnasiums zu Strafsburg, Konrad Dasypodius, dem Verfertiger der ersten kunstvollen astronomischen Uhr des Münsters, nach Proclus verbessert 1564.

Die griechisch-lateinische Ausgabe des Steph. Gracilis von 1557 hatte bis 1612 zehn Auflagen.

Die grofse Oxforder Ausgabe von David Gregory 1705, beinahe bis auf den heutigen Tag die einzig vollständige, ist für die Elemente ganz von der Baseler Ausgabe abhängig. Von 1814—1818 erschien dann Peyrards grofse Ausgabe der Elemente und Data in drei Quartbänden, griechisch, lateinisch, französisch, in der zuerst der Vaticanus 190 verwertet wurde. Eine sehr tüchtige Arbeit ist die griechische Textausgabe von August (Berlin 1826—1829), die jetzt allerdings durch die Ausgabe von Heiberg (griechisch-lateinisch) Leipzig 1882—1888 veraltet ist.

§ 5.

Euclidausgaben in lebenden Sprachen.

Die erste Übersetzung in eine moderne Sprache ist die des grofsen italienischen Algebraikers Nicolo Tartaglia 1543 (wenn man von der bei Scheibel nicht erwähnten spanischen von 1506? absieht).

Ich gebe zunächst eine ausführlichere Angabe über deutsche Euclid-Ausgaben. Es beginnt 1555. Das siebend acht und neunt Buch des hochberühmten Mathematikers Euclides Meg. etc. durch Mag. Joh. Scheybel, der löbl. Univ. zu Tübingen des Euclidis und Arithmeticae Ordinarien (also nur die arithmetischen Bücher).

1562. Die sechs ersten Bücher des Euclid von anfang oder grund der Geometrie etc. Aus griech. Sprach in die Teutsch gebracht, eigentlich erklast. Auch mit verstentlichen Exempeln, gründlichen Figuren und allerley den nutz für Augen stellenden Anhängen gersiert, dermafsen vormals in Teutscher Sprach niemals gesehen worden etc. Durch Wilh. Holtzmann genannt Xylander von Augspurg (Diophant). 2. Aufl. von

1610 durch Sim. Gunzenhausen, sehr selten, 3. nach der holl. Ausgabe von 1608, von 1615.

1651. Henrich Hoffmanns Teutscher Euclides (1653. 2. Aufl.) Bearbeitung, keine eigentliche Übersetzung.

1694 (Ricc. giebt 1685 nach Zakhartchenko) (1694, 1699). Teutsch redender Euclid, oder acht Bücher von der Meſskunst etc. Zu Nutzen aller Generalen, Ingenieure, Natur- und Wahrheits-Kündiger etc. von A. E. B. v. P. Ausgabe von 1740: Ant. Ernst Burkh. v. Pirckenstein.

1697. In teutscher Sprache vorgestellter Euclides, dessen sechs erste Bücher auf sonderbahre und sehr leichte Art mit algebraischen oder aus der neuesten Lösekunst enthaltenen Zeichen, also daſs man denselben Beweis auch in anderen Sprachen gebrauchen kann, durch Samuel Reyher. Kiel (alle Kunstausdrücke verdeutscht) 1692, 1749.

1699. Euclides erstes Buch (zweites?) durch Henr. Meiſsner. Hamburg. Meiſsner ist der verdiente Gründer der so blühenden Hamburger mathematischen Gesellschaft.

1714. Euclid (15 Bücher). Teutsch durch Christ. Scheſslern Dresden (1721? 1723? 1729).

(Nicht 1771, wie Ricc. nach. Zakh. angiebt, sondern)

1733 erscheint die erste deutsche Übersetzung, welche den Text wortgetreu und sinngetreu wiederzugeben bemüht ist. Die sechs ersten Bücher zum Schulgebrauch aus dem Griechischen von Lorenz, mit Vorrede von J. A. v. Segner (Beweis des Parallelenaxioms). 1781 (elftes und zwölftes Buch); von Mollweide 1809, 4. Aufl.; 1818, 24, Dippe 1840.

1781. Euclids Elemente, fünfzehn Bücher aus dem Griechischen übersetzt von Johann Friedrich Lorenz (Halle) 1798, 1809, 1818, 24. 1840.

Die Ausgaben 1809—1824 sind von Mollweide, dem bekannten Mitarbeiter am Klügel. Im Kaiser steht irrtümlich 1819; die Ausgabe von 1840 ist von Dippe.

1860 werden die acht Bücher nach Lorenz zum letzten Male neu ediert von Hartwig.

Ich erwähne noch

1807. Hauff (acht geometrische Bücher), 1828 dito Hoffmann und einen Versuch, der 1800 gemacht wurde:

1800. Erstes Buch der Elemente des Euclid. Für den ersten Unterricht in der griechischen Sprache und Mathematik (Weimar, Verfasser?). 1900 wird der Versuch wiederholt.

Italien.

1543 Nicola Tartalea. 1575 Commandino (nach seiner lateinischen Ausgabe). 1613 Cataldi (sechs erste), 1621 die drei arithmetischen, 1625 das zehnte. 1718 Viviani. 1731 Guido Grandi (keine Übersetzung, sondern abgekürzte Bearbeitung, die bis 1805 immer wieder aufgelegt wurde). 1736 Martino. 1749 italienische Übersetzung der französischen Ausgabe von Dechales (85, 97). 1752 Ximenes (sechs Bücher). 5. Aufl. 1819. 1818 Flauto (acht geometrische Bücher) Geschichte des Parallelenaxiomes 1827, 54.

Dazu noch Borelli Euclides restitutus 1658 (1663 italienisch von Magni, 79, 95) und 1680. Vitale Giordano Euclide restituto, als Vorläufer von Hieron. Saccheri, Euclides ab omni naevo vindicatus 1733 (Mailand).

Frankreich.

1569 (sechs Bücher) von Forcadel, 1615 (alle 15) von Henrion bis 1676 sieben Auflagen, dann abgelöst von Milliet Dechales Bearbeitung, zunächst 1672 der acht geometrischen Bücher (1—6, 11—12), dann 1677 Wiedergabe der Elemente, immer wieder aufgelegt, auch ins Italienische etc. übersetzt, seit 1709 in der Bearbeitung von Ozanam bis 1778. Zu erwähnen sind als Versuche den Euclid zu beseitigen Petrus Ramus Scholae mathem. 1559 und sehr häufig aufgelegt. 1741 Clairaut (Eléments d. géom.). 1794 Legendre, Elém. d. g. bis 1852 fünfzehn Auflagen (1849 von Crelle deutsch) und den französischen Mittelschulunterricht noch heute beherrschend; obwohl

1867 Hoüel, essai critique und Duhamel, Des méthodes (2. Aufl. 1875, T. 2) Euclid gegen Legendre in zutreffendster Weise verteidigen. Siehe auch Gino Loria, Della varia fortuna di Euclide. Roma 1893.

England.

1570 Billingslai (Vorrede von Dee). 1621 Saviles praelectiones tresdecim. 1655 Barrow (abgekürzte Bearbeitung) 1675, 1705, 22, 32; 1781—90 Jam. Williamson (wohl die einzige textgetreue Übersetzung des ganzen Euclid). Pleyfair 1796, bis 1861 acht Auflagen. Keill 1708 (elf Auflagen). Entscheidend für den englischen Unterricht ist Robert Simson 1756: the elem. of Euclid etc., die acht geometrischen Bücher. Diese Bearbeitung bis 1885 dreifsig Mal aufgelegt. Ich erwähne noch als sich enger an Euclid anschliefsend die Ele-

mente von Todhunter 1862. Rob. Simson ist 1806 von Reeder ins Deutsche übersetzt. Die zahllosen neueren englischen Ausgaben betreffen meist die acht geometrischen Bücher und weichen, obwohl sie den Namen Euclids tragen, vom Gange Euclids ebenso ab, wie unsere deutschen Elemente der verschiedensten Lehrer. Noch immer heifst also in der englischen Schulsprache die Geometrie schlechtweg „Euclid“.

Rufsland.

1739 Ivan Astaroff (nach Lat.). 1789 Suvoroff (nach dem Griech.). 1880 Vachtchenko-Zakhartchenko, der eine Bibliographie von 1480—1879 gegeben, die aber wohl mit Vorsicht zu benutzen ist. 1807? Czecha. 1817 polnisch.

Schweden und Norwegen.

1744 Marten Strömer (sechs Bücher), 1753 (elftes und zwölftes) bis in die neueste Zeit immer wieder neu aufgelegt bei wechselnder Bearbeitung.

Dänemark.

1745 Ziegenbalg. In Dänemark scheint bald, nachdem das Lateinische als Unterrichtssprache der Gymnasien aufgehört hat, der Gang des Euclid verlassen zu sein. 1803 Lindrup (sechs Bücher). Zur Zeit sind die verbreitetsten Lehrbücher in Geometrie und Arithmetik die von Petersen.

Holland.

1606 (Jan Pieterzoon) Dou (sechs Bücher nach Xylander); oft aufgelegt. 1617 Frans von Schooten (sehr abgekürzt), 1662 vergröfsert; Vooght vollständig mit dem 16. Buche Candallas 1695. Coets (sechs Bücher) 1702 oft aufgelegt bis 1752, dann Steenstra (sechs Bücher) abgekürzt. 1763, 70, 1803, 1810, 25; seit der Zeit keine holländische Euclid-Bearbeitung bei Riccardi. Euclid scheint in Holland ganz durch die modernen französischen Lehrbücher verdrängt zu sein.

Spanien.

1516?? Zamorano (sechs Bücher) 1576; 1689 Kresa (acht erste).

Griechenland.

1820 Benjamin.

China.

1608 Matteo Ricci (sechs Bücher); 1857 auf Befehl des Vizekönigs vervollständigt durch Wylie.

§ 6.

Die Kommentatoren des Euclid.

Der festgefügte Bau der Elemente hat, wie er einerseits die höchste Bewunderung erregte, andererseits die Versuchung erweckt, die Geometrie auf andere Weise ebenfalls zu begründen. Dazu kommt, dafs der Euclid in seinem ersten Buche einen mathophilosophischen Teil enthält, der die Grundbegriffe der Geometrie und die nötigen und hinreichenden Voraussetzungen angiebt, von denen die ersteren ihrer Natur nach unauflösbar, die anderen variabel sind. So hat der Euclid, und das ist vielleicht sein Hauptverdienst, eine staunenswerte Geistesarbeit hervorgerufen, die wir ausführlich bei der Parallelentheorie besprechen müssen. Hier wollen wir nur einen Überblick über die hervorragendsten Interpretatoren geben, welcher zeigt, wie recht Gino Loria hat, wenn er als Prinzip seiner ausgezeichneten Arbeit „Della varia fortuna di Euclide Rom. 1893“ das Gesetz der Kontinuität ausspricht. Es ist ein roter Faden, der von Archimedes und Apollonius bis Hilbert geht. Von Apollonius sind Spuren eigener „Elemente“ erhalten. Darunter eine ganz allgemeine Definition des Winkels (Heiberg V S. 88 nicht 89, wie Loria zitiert). Archimedes gab eine von Euclid abweichende Definition der Geraden (vermutlich auch der Ebene), neue Prinzipien, darunter das nach ihm benannte, für die Exhaustionsmethode, die er zur Integralrechnung umbildete. Ihm schliefst sich würdig Heron, der grofse Mechaniker des 1. Jahrh., an, von seinem Kommentar sind uns Fragmente durch Proclus überliefert.

Aus der Zusammenstellung der Euclid-Stellen bei Heron durch Heiberg geht klar hervor, dafs die Definitionen des Euclid schon zu Herons Zeit die uns überlieferte Form hatten, Euclid also damals schon der unantastbare Klassiker der Elemente war, wie Tannery sagt. Es sei denn, dafs Heron selbst auf diese Formulierung Einflufs gehabt hat.

Es ist das Parallelenaxiom und die Definitionen, überhaupt die ganze Anordnung des ersten Buches, dann gewisse Inkongruenzen zwischen den sechs ersten und den drei letzten Büchern, der sonder-

bare Umstand, dafs Euclid die Lehre von den Proportionen ganz allgemein im fünften Buch begründet, und dann die elementaren für rationale Zahlen noch einmal im siebenten, was von jeher die Kommentatoren in Thätigkeit gesetzt hat.

Die Inkongruenz bezieht sich besonders auf die Bewegung, in den planimetrischen Büchern wird sie ängstlich vermieden, nur zum Beweis des vierten Satzes (ersten Kongruenzsatz) und des achten wird sie herangezogen, dagegen scheut sich Euclid in den stereometr. Büchern absolut nicht die Definition der Körper auf die Bewegung zu stützen. Man hat daraufhin (ich selbst war gleicher Meinung) geschlossen: „Einen Homeros gäb es nicht, sondern acht bis zehn“, aber ich wurde aufmerksam gemacht, dafs nach Platon und besonders Aristoteles der Begriff der Bewegung einen körperlichen Raum voraussetzt. Dies erklärt auch, dafs Euclid die Gleichheit des rechten Winkels als „Forderung“ einführte.

Auf Heron folgt Gemīnos bezw. Géminus, von dem Proclus berichtet, er habe die Verschiebbarkeit in sich der Schraube auf dem Rotationszylinder, wenn nicht gefunden, so doch gekannt. Es folgt eine Ära, in der die zusammenfassende eigentlich philosophische Geistesrichtung unter dem Einflufs des Aristoteles gegen die Ausbildung der Spezialwissenschaften, wie Medizin, Geographie, Astronomie, Mechanik etc. zurücktritt (vgl. Windelband, Geschichte der alten Philosophie). Aus dieser Zeit, in der sich von mathematischen Disziplinen die Trigonometrie (eben und sphärisch) im Anschlufs an die Astronomie entwickelt, wissen wir von besonderen Kommentaren nichts, aber von den Elementen, dafs sie zur Ausbildung des angewandten Mathematikers für unentbehrlich galten. Als gleichzeitig mit dem Christentum gegen diese nüchterne Periode in Anlehnung an den Theosophen Platon zunächst der Neupythagoräismus sich erhob, war es anfangs die arithmetische Seite des Euclid, die in Nikomachus von Gerasa, um 100 n. Chr., den „Elementenschreiber der Arithmetik“ (Cantor) und in Theon von Smyrna ihre Kommentatoren fand. Um 300 (nach Cantor und Zeuthen) lehrte dann zu Alexandria Pappos, dessen Kollektaneen von unschätzbarer Bedeutung sind. Pappos hat sicher einen Kommentar zum zehnten Buche geschrieben, von dem Reste im Vaticanus erhalten sind und der uns nach Heiberg wahrscheinlich ganz in einem noch unedierten Leydner Manuskripte erhalten ist. Mit den Neuplatonikern, jener seltsamen Mischung christlicher und platonischer Mystik, nimmt auch die Mathematik die platonische Richtung auf die Probleme, welche die geometrischen Grundbegriffe und die Methodik bieten, ener-

gisch auf. Wir nennen Jamblichus, Porphyrios, von denen uns Spuren ihrer Scholien erhalten sind, Theon, dessen Ausgabe den „echten“ (Heronischen?) Euclid fast völlig verdrängte, und Proclus, dessen Kommentar zum ersten Buch uns fast ganz erhalten ist. Der Kommentar, der bis auf 1873 nur in der Ausgabe des Grynaeus 1533 (Herwagen) gedruckt war, ist für die Geschichte der Mathematik einzig. Tannery, der zuverlässigste Detailforscher hellenischer Mathematik, nennt sein Verständnis geradezu das Problem der Geschichte dieser Mathematik. Die Ausgabe von Friedlein von 1873 ist philologisch sehr bedeutend, wenn auch nach Heiberg noch nicht das letzte Wort über Proclus, aber griechisch, es existiert nur die lateinische Übersetzung von Barocci(us) 1560, welche oft nur eine Wortübersetzung ist, wie die englische (wörtliche) des Barocci von Taylor.

Als Justinian 529 die Schule von Athen, mit der die hellenische Kultur begann und schloſs, aufhob und die Lehrer vertrieb, kam Euclid mit ihnen nach Persien, und so an die Araber, wo er im achten und neunten Jahrhundert an Haggag und Ishâk Übersetzer fand. Sehr bald darauf muſs es auch arabische Kommentare gegeben haben, wie aus der Ausgabe des Campanus hervorgeht, der schon erwähnte Nasur ed Din im 13. Jahrh. ist keineswegs unbedeutend, der auch zuerst die Trigonometrie als eigenen Zweig behandelt hat.

Die Renaissance macht Proclus bekannt, an ihn schlieſst sich Commandinus und Clavius an. Der erstere wirkte besonders auf die Engländer, Savile, der die Professur des Euclid in Oxford begründete, wodurch Wallis und wohl auch Barrow (erste Ausgabe 1652) und durch diesen Newton auf Euclid und die Beschäftigung mit den Grundlagen hingewiesen wurden. Vor allem haben wir Robert Simson zu nennen (der direkt Commandinus zugrunde legt) und der besonders auf die englische Schulmathematik von allerwesentlichstem Einfluſs geworden ist. Der Kommentar erschien 1756. Titel: Die sechs ersten Bücher nebst dem elften und zwölften des Euclid mit Verbesserung der Fehler, wodurch Theon und andere sie entstellt haben etc. mit erklärenden Anmerkungen (aus dem Englischen übersetzt von Roeder, her. von Niesert Paderborn 1806). Clavius kennt den Proclus ganz genau, auch er harrt noch der deutschen Herausgabe, der er im hohen Grade wert ist, er hat nebst Borelli sicher auf seinen Ordensbruder Saccheri gewirkt, von dessen Euclides ab omni naevo vindicatus (Mediol. in 4. 1733) die heutige sogenannte nicht-eucl. Geometrie gezählt wird. Es ist wahrscheinlich, daſs Lambert in Chur den Saccheri kennen lernte, und fast sicher, daſs Gauſs wieder Lamberts Abhandlung im

Hindenburgschen Archiv von 1786 gelesen; Gaufs wirkte dann auf die Bolyai (durch den Vater Wolfgang auf den Sohn Johann) und durch Vermittelung von Bartels auf Lobatschewski.

Für Frankreich ist aufser Clavius noch Petrus Ramus, der Besieger der Scholastik, von Bedeutung. Hier geht der Weg über Tacquet 1659 und Arnauld zu Clairaut 1741 und Legendre 1794 und Bertrand 1810. Clairaut hat sich auch auf die deutschen Schulen (des Adels z. B. Ilfeld) verbreitet. Es scheint, als ob auch Lambert ihn gekannt habe. Doch ist der Ausgang vom Rechteck ein so natürlicher, dafs ich selbst um 1880, ohne eine Ahnung von Clairaut oder Lambert zu haben, im Unterricht einen ganz ähnlichen Weg einschlug. Der aufserordentliche Beifall und Verbreitung der Elemente Legendres ist bekannt und berechtigt, noch heute beeinflussen sie den Unterricht auf Mittelschulen, nicht blofs in Frankreich, sondern in Spanien und selbst in Deutschland.

Was die deutschen Schulen betrifft, so möchte ich auf eine Schrift Hubert Müllers aufmerksam machen: „Besitzt die heutige Schulgeometrie noch die Vorzüge des Euclid-Originals“? Ich kann meine Kritik (Deutsch. Litter. 1887 N. 37) jetzt dahin ergänzen: Die deutsche Schulgeometrie hat sie nie besessen. Weder Johannes Vogelin, bekannt durch die Vorrede Melanchthons der Ausgabe von 1536, noch des Dasypodios Volum. I und II, noch die Mathesis juvenilis von Sturm oder Wolffs oder Kästners Anfangsgründe oder Thibauts Grundrifs, von Kambly, Mehler, Henrici (und Treutlein) ganz zu schweigen, sind jemals dem Gange Euclids gefolgt. Dagegen waren die Studenten und die Lehrer bis etwa um die Mitte unseres Jahrhunderts, wie die rasch aufeinander folgenden Ausgaben am besten beweisen, völlig mit dem Euclid vertraut. Von da ab ändert sich die Sache, seit Dinde 1840 ist keine vollständige Ausgabe der Elemente erschienen und 1843 und 1860 keine der geometrischen Bücher, und ich bin sicher, dafs es eine minimale Anzahl Lehrer giebt, die den Euclid gelesen haben. Zum Beweis ein eigenes Erlebnis: Auf dem Umweg über die Abstandslinie der nicht-eucl. Geometrie fand ich eine Konstruktion der Tangente an den Grenzkreis, die mir auch für unsern alten Kreis ebenso einfach, als neu erschien, ich trug sie in München vor, wo über 100 Mathematiker, darunter fast alle Hochschullehrer von Bedeutung, waren, weder ich, noch ein anderer hatte eine Ahnung, dafs es die Konstruktion des Euclid war. Übrigens mufs gesagt werden, dafs auch die Studenten der Zeit von 1500—1700 vielfach nicht über das erste, allenfalls das zweite Buch hinauskamen; die 13 Vorlesungen Saviles gehen bis zu Satz 8,

Buch 1; ferner aber wuchs durch die ungeheure Entwickelung der Analysis von 1650—1750 und der Geometrie von 1750—1850 das Material derartig, dafs der alte ehrwürdige Euclid zurücktreten mufste. Einen Teil des Sinkens trugen auch die ungerechtfertigten Angriffe Schopenhauers, worüber ich besonders meine Besprechung der Schrift „Zur Nieden, der Beweis in der Geometrie“ in der Zeitschrift für Gymnasial-Wesen 1894? zu vergleichen bitte. Schopenhauer hatte als Künstler, der er ist, für die intuitive Erkenntnis vollstes Verständnis, aber um so geringeres für die logische, die oft ebenso unmittelbar als jene ist. Nun ist aber die Geometrie als Wissenschaft eine untrennbare Verbindung von Anschauung und Logik, und darum mufste der Versuch, den z. B. Kosack in dem Nordhausener Programm anstellte, die Geometrie rein auf Anschauung zu begründen, gerade so scheitern, wie der noch berühmtere Bolzanos von 1804 (Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementar-Geometrie), die Geometrie rein logisch zu begründen. Bolzano hat übrigens viel mehr von Leibniz entlehnt, als bekannt ist. Der grofse „Nebenbuhler“ Newtons zeigt sich auch in der Auffassung der Grundlagen als Widerpart.

Während Newton in der Vorrede der Phil. nat. ausdrücklich auf den Ursprung der mathematischen Grundgebilde aus der Mechanik hinweist: „Gerade Linien und Kreise zu beschreiben sind Probleme, aber keine geometrischen“, ist Leibniz bemüht, der Anschauung so wenig als möglich einzuräumen. Es scheint wenig oder gar nicht bekannt, dafs schon bei Leibniz Lebzeiten Ansichten desselben über die Grundlagen der Geometrie veröffentlicht sind in La Montre 1691. Les 47 prop. du I livre d. El. d'E. av. des rem. de G. G. Leibniz. Ähnlich wie für Deutschland liegt die Sache in Frankreich, nur in England folgt Ausgabe auf Ausgabe noch im 19. Jahrh., und noch ist der „Syllabus“ nicht zustande gekommen, der den Euclid verdrängen soll; auch in Schweden und Norwegen scheint noch ziemliches Interesse für Euclid zu herrschen. In neuester Zeit ist das Interesse für historisch-philosophische Ausbildung, Dank sei es dem Altmeister M. Cantor, wieder sehr stark erwacht, schon giebt es historische Vorlesungen in mehreren Universitäten, auch mehren sich die mathophilosophischen, und sie werden vielleicht, ehe das 20. Jahrhundert verflossen, allgemeiner werden.

ELEMENTE

I. [Buch].

Erklärungen [Definitionen].[1])

1) [Der] Punkt ist [das], dessen Teil nichts [ist].[2])

2) [Die] Linie aber breitenlose Länge.[3])

3) [Der] Linie (aber) Äufserstes [sind] Punkte.[4])

4) [Die] Gerade ist [die] Linie, welche gleichmäfsig durch ihre Punkte gesetzt ist[5]) (d. h. die Gerade ist die Linie, auf der kein Punkt vor dem andern ausgezeichnet ist).

5) [Die] Fläche ist [das Raumgebilde], was nur Länge und Breite hat.[6])

6) [Die] Ebene ist [die] Fläche, welche gleichmäfsig durch ihre Geraden gesetzt ist.[7])

7) Ein ebener Winkel entsteht, wenn zwei Linien (in) der Ebene zusammentreffen, welche nicht in derselben Geraden liegen, durch die Biegung von der einen Linie zur andern.[8])

8) Falls die den Winkel begrenzenden Linien Strahlen sind, so heifst der Winkel geradlinig.

9) Falls ein auf einer Geraden stehender Strahl[9]) die aufeinander folgenden Winkel zu gleichen macht, so ist jeder der beiden gleichen Winkel ein rechter, und der Strahl heifst senkrecht [zu der Geraden], auf der er steht.[10])

10) Stumpf ist der Winkel, der gröfser als der rechte.

11) Spitz aber, der kleiner als der rechte.

12) Grenze ist das, was das Aufserste irgend wovon ist.[11])

13) Figur[12]) ist das, was eine oder mehrere Grenzen hat.[13])

14) Kreis heifst eine ebene Figur von einer Linie, (welche Peripherie heifst) [so] umschlossen, dafs alle von einem der im Innern liegenden Punkte zu ihr (zu der Peripherie des Kreises) gezogenen Geraden einander gleich sind.

15) Mittelpunkt (Zentrum[14])) des Kreises wird jener Punkt genannt.

16) Durchmesser des Kreises ist irgend eine Gerade, welche durch den Mittelpunkt gezogen ist und von dem Umfang des Kreises an beiden Seiten begrenzt ist; er halbiert auch den Kreis.

17) Halbkreis heifst die Figur, welche von einem Durchmesser und dem von ihm abgeschnittenen Umfang [Bogen] umschlossen wird. Das Zentrum des Halbkreises ist dasselbe wie das des Kreises.

18) Geradlinige Figuren sind die von Geraden begrenzten. Dreiseitige die von drei, vierseitige die von vier, vielseitige die von mehr als vier Geraden begrenzten.

19) Von den dreiseitigen Figuren ist ein gleichseitiges Dreieck [diejenige] mit drei gleichen Seiten, ein gleichschenkliges mit nur zwei gleichen Seiten, ein ungleich[seitig]es das mit drei ungleichen Seiten.

20) Aufserdem heifst von den dreiseitigen Figuren rechtwinkliges Dreieck das, welches[15]) einen rechten Winkel, stumpfwinkliges das, welches einen stumpfen Winkel hat, spitzwinkliges aber das, welches drei spitze Winkel hat.

21) Aber von den vierseitigen Figuren ist ein Quadrat[16]) die gleichseitig rechtwinklige, ein Rechteck[17]) die zwar rechtwinklige aber ungleichseitige, ein Rhombus die zwar gleichseitige aber nicht rechtwinklige, ein Rhomboid die, deren gegenüberliegende Seiten und Winkel einander gleich sind und die weder gleichseitig noch rechtwinklig ist; die Vierseite aufser diesen sollen Trapeze heifsen.

22) Parallel sind Gerade, welche in derselben Ebene liegen und auf jedem von beiden Teilen ins unendliche[18]) ausgezogen auf keinem von beiden einander treffen.

Anmerkungen zu den Erklärungen.

1) Griech. ὅροι s. v. w. „Abgrenzungen“ scl. der Begriffe. Die Erklärungen des Euclid sind von jeher Gegenstand heftigen Streites gewesen. Man hat der des Punktes vorgeworfen, dafs sie negativ sei, der der Geraden, Fläche etc., dafs sie keine Vorstellungen des Erklärten gebe; und selbst ein Mann wie Loria schliefst sich zustimmend an einen solchen Tadel Tyndals an. Als wenn Euclid auch nur den Versuch hätte machen wollen, jemandem, der kein Bild von der Geraden besitzt, ein solches durch Worte zu erzeugen. Da hätte er ebenso gut einem Blindgeborenen durch Worte die Anschauung der grünen Farbe geben können. Treffend sagt Lambert in: Briefe an Holland (Deutsch.

Gelehrt. Briefwechsel I, Bd. IV): „Dafs Euclid seine Definitionen vorausschickt und anhäuft, das ist gleichsam eine Nomenclatur. Er thut dabei weiter nichts, als was z. B. ein Uhrmacher oder anderer Künstler thut, wenn er anfängt seinem Lehrjungen die Namen seiner Werkzeuge bekannt zu machen.“

2) Das Wort σημεῖον (Semeion) bedeutet „Zeichen“, ein Raumzeichen, kein Raum ist dem Euclid der Punkt. Dem lat. Punkt entspricht genau das in Scholien vorkommende Wort Stigma, das Aristoteles und Archimedes gebrauchen. Zamberti hat signum, Campanus punctum; Holzmann (Xylander): Tipffelein. Die hier gegebene Auslegung ist, wie alles, schon dagewesen, sie findet sich bei Martianus Capella (s. Heiberg) (satyros): Punctum vero est cuius pars nihil est, sonst stets nulla, also Punkt ist, was keinen Teil hat. Verf. glaubt den Sinn des Euclid getroffen zu haben. Der Begriff „Punkt“ gehört zu den „Grenzbegriffen“, den notwendigen Abschlüssen von an sich (vermöge des psychischen Trägheitsgesetzes) unbegrenzt fortgesetzten Vorstellungsreihen. Der Punkt ist der Grenzabschlufs der Lokalisation, wird sie immer schärfer und schärfer fortgesetzt, so führt sie zu dem Grenzbegriff Punkt, besser „Ort“, der (vgl. Kerry System einer Theorie der Grenzbegriffe) zugleich mit einer Begriffsveränderung verbunden ist. Der Rauminhalt verschwindet, die Ortsbeziehung bleibt. Punkt nach unserer Interpretation des Euclid ist also die äufserste Grenze dessen, was wir noch als Raumvorstellung denken (nicht anschauen) können, und wenn wir darüber hinausgehen, hört nicht nur die Ausdehnung, sondern auch die Lagenbeziehung auf, und in diesem Sinne ist der Teil nichts (vgl. Max Simon, zu den Grundlagen nicht-Eucl. Geometrie Strafsburg, 1891).

Die Analogie, die der Punkt des Raumes mit dem der Zeit hat, hebt schon Proclus Fried. S. 93 hervor: er ist unteilbar wie das jetzt (τονῦν) und die Einheit (im Sinne der Pythagoräer).

Aus der Erzeugung des Punktes als Grenzbegriff gelangt man fast unmittelbar zu einer Identifizierung mit dem Unendlichkleinen jeder Art, dem Strecken-, Flächen- und Kugelelement, dem Differential in unserem Sinne, schon Xylander setzt seiner Erklärung hinzu: Das ist Anfang aller Gröfse, jedoch er selbst keine Gröfse, und Proclus S. 88: aber es liegt in ihm verborgen eine unbegrenzte Macht, Längen zu erzeugen. Diese Veränderung im Begriffe des Punktes taucht besonders deutlich bei der Auffassung der Tangente als Gerade, die ein Linienelement mit der Kurve gemein hat, auf. (Vieta.)

3) Euclid definiert den schwierigen Begriff Dimension (vgl. die eben zitierte Schrift) nicht, so wenig wie er den Raum definiert oder „Richtung“. Das sind ihm gegebene Vorstellungen, wie Punkt, Gerade, Ebene in der projektiven Geometrie.

4) *πέρατα* würde am besten wiedergegeben mit: das, bis wohin (sich nämlich eine Linie erstreckt).

5) *εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' αὑτῆς σημείοις κεῖται.* Grammatisch kann der Dativ von *ἐξ ἴσου* abhängig gemacht werden, dann wäre er soziativ: die Gerade liegt in gleicher Weise wie ihre Punkte; so faſst es Proclus (Friedl. 109). Er sagt ausdrücklich: die Gerade ist die einzige Linie, deren Länge zwischen je zweien ihrer Punkte mit dem Abstand ihrer Punkte zusammenfällt. Die Begriffe Abstand und Richtung sind nicht nur nach Bolzano ursprüngliche schlechthin irreducible Grundbegriffe, sondern sicher auch nach der des Euclid. Läſst man den Dativ von *κεῖται* abhängen, so heiſst es: die Gerade liegt für (durch) ihre Punkte gleichmäſsig, und es wäre durchaus gestattet zu ergänzen, in Bezug auf die Richtung. Nimmt man *κεῖται* als Passiv von *τιθημι*, wie sehr oft bei Euclid, so hat man dem Sinne nach unsere Version: die Gerade ist durch ihre Punkte gleichmäſsig gegeben worden. Jedenfalls enthält *ἐξ ἴσου* keinen Zahlbegriff, sondern ist qualitativ, und es ist falsch, es mit „auf einerlei Art“ zu übersetzen, wie nicht nur Lorenz und Mollweide (Klügel), sondern selbst Stäckel und Engel in der ausgezeichneten Theorie der Parallellinien gethan.

Diese Interpretation bringt Auffassungen hinein, die auf Archimedes zurückgehen, von dem auch die Definition als kürzeste Linie herrührt nach Angabe von Proclus (Geminos), wenn auch Killing sagt, daſs er sie bei Archimedes nicht habe finden können; sie entspricht durchaus dem Wesen des groſsen Mathematikers, der von der Erfahrung und Bewegung ausgeht; vgl. die Stelle bei Proclus 109, 17—20. Eben dort finden sich schon fast alle Erklärungen, die bei Schotten in dessen trefflichem: Inh. u. Meth. des plan. Unter. zusammengestellt sind und bei Pfleiderer in dessen so fleiſsigen Scholien.

Die von Schotten Gauſs zugeschriebene, daſs die Gerade beharrt, wenn sie um zwei ihrer Punkte rotiert, ist nicht von Leibniz, sondern ist auch schon bei Proclus. Die hier gegebene Interpretation vindiziert allerdings dem Euclid scheinbar einen logischen Fehler, denn die Erklärung paſst auf den Kreis (und die Schraubenlinie des Rotationszylinders, deren Verschiebbarkeit in sich selbst nicht bloſs dem Geminos, wie Knoche nach Proclus (Progr. Herford 1862) bemerkt, sondern

auch nach Proclus S. 105 dem Apollonius bekannt war). An der Definition der Geraden kann man gut den Weg von der Anschauung zur Logik verfolgen. Platon (Fiedl. 109, 21) definiert die Gerade als eine, „deren Mittleres die Enden beschattet", d. h. also als Weg des Lichtstrahls, also rein durch die Sinnlichkeit gegeben. Euclid in Definition 4 und den beiden Forderungen 1 und 2 faſst sie auf als die Linie, welche durch zwei Punkte bestimmt ist, rein logisch, ohne auch nur den Versuch zu machen, eine Vorstellung zu erwecken. Ich erwähne die Definition von Archimedes, die uns erhalten ist: Die gerade Linie teilt die Ebene in zwei Teile, die nur durch ihre entgegengesetzte Lage zu unterscheiden sind.

Man trifft sie seit Leibniz oft wieder ohne Quellenangabe. Euclid denkt die Gerade nicht in der Ebene, sondern für sich, und das *ἐξ ἴσου* könnte sich auch beziehen auf die völlige Unterschiedlosigkeit aller Richtungen bei jedem Punkte. Ich hebe noch hervor, daſs die Gerade, wenn sie erscheint, als Gerade erscheint, doch also von jedem Punkte auſser ihr als Gerade projiziert wird, welche „Gleichmäſsigkeit" der Kreis nicht hat. Wenn ich an der hier gegebenen Version festhalte, so geschieht es, weil der Ausdruck bei der Ebene wiederkehrt und zeigt, daſs *ἐξ ἴσου κεῖται* ein terminus technicus ist, den vielleicht der Eleat Parmenides geschaffen, wo ähnliche Wendungen bei der Kugel und sonst vorkommen (Diels, S. 29; S. 43; S. 49), dann aber ist es mehr als fraglich, ob Euclid eine Verschiebbarkeit in sich selbst mit beständiger Richtungsänderung als eine *ἐξ ἴσου*, als ein wirklich der Qualität nach gleiches liegen oder vielmehr (gesetzt) sein angesehen hat, ja es scheint mir beinahe sicher, daſs wie Parmenides die Kugel, so Euclid den Kreis vom Zentrum aus (aus dem Zentrum griech.), als gleichliegend angesehen hat. Dazu kommt, daſs Euclid den Kreis genau beschreibt, und dabei gar nicht von der Kreislinie, sondern von der Kreisfläche spricht. Noch bemerke ich die Variante *μέρεσι* statt *σημείοις*, wo also wohl die Richtungsgleichung ausgedrückt werden sollte in allen Teilen, und schlieſslich, daſs Duhamel bei seiner Interpretation ganz willkürlich den Artikel *τοῖς* weggelassen hat.

6) Die Fläche ist wohl der älteste, klar bewuſste geometrische Begriff, der aus der Anschauung der physischen Körper (goldener Wein im grünen Römer) erworben ist. In dem „nur" werden die drei Dimensionen als selbstverständlich vorausgesetzt.

7) Vgl. die Note 5. Die Definition würde auf den Rotationszylinder ebenfalls passen, sie wird eindeutig, wenn man (vgl. Simon,

zu den Grundlagen) statt Gerade „Richtung“ sagt. Die gewöhnlich Robert Simson zugeschriebene Definition: die Ebene ist die Fläche, welche jede Gerade, die mit ihr zwei Punkte gemein hat, ganz enthält, ist schon bei Proclus erwähnt (Friedl. 117, Z. 8), an die sich Kästners eng anschliefst.

Auch von dieser Definition 7 gilt, was von der der Geraden gesagt ist; den aus der Anschauung im Laufe ungezählter Jahrtausende erworbenen Begriff bezw. die Vorstellung der Ebene setzt Euclid bei dem Hörer voraus.

8) Die Definition des ebenen Winkels ist oft getadelt worden, κλίσις, hier mit Biegung wiedergegeben, ist meist mit „Neigung“ übersetzt worden, so auch von Heiberg, und bezieht sich zunächst auf die Änderung in der Richtung. Von da aus ist der Weg leicht zu der ebenso verbreiteten als schlechten Erklärung des geradlinigen Winkels als „Richtungsunterschied“ zweier Geraden. Apollonius hebt an der angeführten Stelle die Zweideutigkeit, indem er (Friedl. S. 124) definiert: Der Winkel ist die Verengerung der Ebene oder des Raumes an einem Punkte infolge der Biegung von Linien oder Flächen; auch hier wie bei Euclid handelt es sich also nur um eine Worterklärung (Lambert), nicht um eine die Vorstellung des Winkels in der Anschauung erzeugende. In Schottens vergleichender Planimetrie füllt die Definition des Winkels 40 Seiten, die von mir (?) herrührende findet sich im zweiten Teil erwähnt. Der (geradlinige) Winkel ist die Grenze des Kreissektors bei über jedes Mafs wachsendem Radius. Zu bemerken ist, dafs Euclid vom krummlinigen Winkel nur sehr selten Gebrauch macht; III, 17 etc. Dafs Euclid den Winkel (stets geradlinig) im wesentlichen als eine Flächengröfse auffafst, siehe Definition 9, περιέχουσαι, und wenn er stets sagt: der Winkel „ὑπὸ“ z. B. αβγ, so ist zu ergänzen περιεχομένη, und das ὑπὸ ist das Subjekt des Aktivs im Passiv, es heifst also nicht „sub“, sondern „ab“, d. h. der Winkel, welchen der gebrochene Linienzug αβγ enthält, und das ist auch vollkommen klar, da er unmittelbar vom Winkel als der nicht völlig begrenzten Fläche, zum „σχῆμα“, der völlig begrenzten Fläche übergeht.

Ich füge noch hinzu, dafs selbst bei Proclus, noch also 400 n. Chr., die Winkel auf solche, welche kleiner als zwei rechte sind, beschränkt sind. Vermutlich um der Eindeutigkeit der Fläche zwischen zwei Rechten; die Ausschliefsung des „flachen Winkels“ zeigt, dafs das „Richtungselement“ zurücktritt, denn einen schärferen Richtungsunterschied als den zwischen zwei entgegengesetzten Rechten giebt es nicht.

Die Übersetzung von ἁπτομένων mit „sich berührenden“ bringt hier schon ganz unnötig die Frage vom Kontingenzwinkel hinein (vgl. III 17).

9) Euclid unterscheidet nicht wie wir zwischen Strecke, Strahl und Gerade, sondern hilft sich durch Zusätze wie begrenzte Gerade, die beiden Teile (für die beiden Strahlen) an beiden Seiten eines Punktes etc.

10) ἐφεξῆς, der Reihe nach, wird bei Euclid oft für nebeneinanderliegend gebraucht, κάθετος „hinabgesandt“ entspricht unserem „Senkrechte“ und wird sich vermutlich wie dies auf das Bleilot beziehen, das diese Richtung giebt. Übrigens bildeten Definition 10, 11, 12 noch bei Proclus eine.

11) Grenze: ὅρος, das Äufserste: πέρας; beide Worte oft synonym, Proclus sagt: ὅρος wird von Flächen und Körpern, πέρας von Linien gebraucht (Friedl. 136). Rob. Simson hält sie für unecht.

12) Das Wort σχῆμα stammt von ἔχω, haben, halten, und bezeichnet also dasselbe wie unser „Gehalt“ in der Geologie, goldhaltig etc. Unser Figur vom lateinischen fingere ist allgemeiner und bedeutet „Gebilde“. Eine Anzahl zerstreuter Punkte kann man wohl als Figur bezeichnen, aber nicht als „schema“ im Sinne Euclids.

13) Zu dem, was über die Gerade gesagt ist, ist noch zu bemerken, dafs Euclid sich eigentlich gar nicht mit der Kreislinie, sondern mit der Kreisfläche beschäftigt; während wir heute unter Kreis schlechtweg die Linie verstehen, ist bei Euclid die Fläche gemeint. Die Kreislinie wird von ihren Teilen unterschieden, die ebenfalls Peripherie genannt werden; erst die Araber führen das Wort Bogen für den Teil ein. Die Kreislinie heifst bei Proclus ἡ περιφερής.

14) Zentrum von κέντρον der Ochsenstachel, der Nagel, erinnert so recht deutlich an den empirischen Ursprung der Mathematik, deren Ablösung und Befreiung von den irdischen Resten gerade die Arbeit der Pythagoräer und Platoniker galt; doch bleibt ein Erdenrest zu tragen peinlich!

15) Quadrat; griech. Viereck schlechtweg; unter 100 Menschen werden 90, wenn man sie auffordert, ein Viereck zu zeichnen, annähernd ein Quadrat zeichnen, und wenn ein Dreieck, dann ein gleichseitiges, vgl. Simon, Elem. d. Geom. S. 48.

16) ἑτερόμηκες = von verschiedener Länge sc. der Seiten; man sieht deutlich, wie der empirische Gang sich hier geltend macht. Das Quadrat ist das ursprüngliche Viereck des Handwerkers, Baumeisters

u. s. w., dann kommt durch Verschiedenheit der Länge zweier benachbarten Seiten das Rechteck etc.

17) Aus dem Imperativ „καλείσθω“ geht deutlich hervor, dafs dieses Wort (Trapez, Tisch) von Euclid neu eingeführt wird.

18) εἰς ἄπειρον, richtiger „Zum Unendlichen“, eigentlich das, zu dem es kein Jenseits giebt; die Unendlichkeit des Raumes wird dabei stillschweigend vorausgesetzt.

Die heutige Fiktion, dafs Parallele ihren unendlichfernen Punkt gemein haben, rührt von Desargues 1639 her, und wurde aufser von Steiner auch von Newton gewürdigt. Die Definition, dafs es Gerade sind, die überall von einander den gleichen Abstand haben, die noch neuerdings von Hübner seiner trigon. Planim. zugrunde gelegt ist, hat ihren Ursprung nicht bei Wolf 1730, nicht einmal bei Clavius 1574 oder Petrus Ramus, sondern findet sich nach Proclus (Friedl. 176) schon bei Posidonius und ist nach demselben Autor (S. 178) von dem grofsen Geometer Géminos (etwa 100 v. Chr.) angenommen.

Es verdient bemerkt zu werden, dafs hier schon in der Erklärung die Forderung der unendlichen Länge der Geraden ausgesprochen ist (als selbstverständliche und stillschweigende aus der angewandten Mechanik in die Geometrie hinübergenommene Thatsache), ohne welche die Parallelentheorie hinfällig wäre.

Forderungen.[1]

Es soll gefordert werden, dafs sich

1) von jedem Punkt bis zu jedem Punkt eine und nur eine Strecke führen lasse[2])

2) und diese Strecke sich kontinuierlich auf ihrer Geraden ausziehen lasse.[3])

3) Um jedes Zentrum sich mit jedem Abstand ein und nur ein Kreis zeichnen lasse.[4])

4) Und alle rechten Winkel einander gleich seien.[5])

5) Und wenn eine zwei Geraden schneidende Gerade mit ihnen innere an derselben Seite liegende Winkel bildet, die [zusammen] kleiner sind als zwei rechte, so schneiden sich die beiden [geschnittenen] Geraden bei unbegrenzter Verlängerung auf der Seite, auf der diese Winkel liegen.[6])

Anmerkungen zu den Forderungen.

1) Proclus sagt (vgl. L. Meyer, Progr. Tübingen 1885), dafs die Forderungen von den Grundsätzen sich unterscheiden wie die Aufgaben von den Lehrsätzen. Die ersteren verlangen Konstruktionen, die jeder leicht ausführen könne, die anderen Sätze, die jeder leicht zugäbe. Beiläufig vindiziert Meyer auf S. 15 dem Aristoteles einen ziemlich groben logischen Fehler, durch falsche Übersetzung des „*δεῖται*" Friedl. S. 188, Z. 19; es ist hier wiederzugeben mit „ermangelt" und nicht: bedarf. Aristoteles sagt: die Forderung ermangelt des Beweises, den man gerne geben möchte, wenn man nur könnte, während der Grundsatz von jedem ohne weiteres als richtig anerkannt wird.

Die Unterscheidung des Proclus pafst aber eigentlich nur auf das erste und dritte Petitum, und es darf daher nicht überraschen, wenn in die Handschriften eine Verwirrung eingerissen ist und sich z. B. in vielen Nr. 5 als (11.) Grundsatz findet und das schon vor Theon rezipierte „Gerade schliefsen keinen Raum ein" sich im Vaticanus als Forderung 6 und in anderen Codices als Grundsatz 9 findet. Im übrigen wird die Fünfzahl der Postulata ausdrücklich hervorgehoben, vgl. Heiberg 7. 1. S. 8 Note. Die Unterscheidung des Proclus ist gewifs nicht die des Euclid, sieht man näher zu, so enthalten die „Aitēmata" Grundthatsachen der Anschauung, die *κοιναὶ ἔννοιαι* (Axiome) (Grundsätze) aber Grundthatsachen der Logik.

2) Von den drei ersten Forderungen sagt Proclus (Meyer, Progr. Tübingen 1875): Diese drei Sätze sollen ihrer Klarheit wegen und weil darin etwas zu schaffen uns aufgetragen wird, nach Géminos notwendig unter die Forderungen gehören. Wir erinnern an die Bemerkung Newtons, 1 und 3 erhalten Probleme, die von der angewandten Mechanik ihre Lösungen empfangen haben. Darauf deutet auch der Ausdruck Ekbalein, „auswerfen", der stets für das Verlängern von Strecken gebraucht wird, und er erinnert an die Konstruktion der Geraden mittelst des Seiles, das von einem Punkte aus zum anderen geworfen (und angezogen) wird.

3) *ἐπ' εὐθείας* der Folgerung 2 hat verschiedene Auslegung gefunden. Meyer l. c. sagt „in gerader Richtung" (meint wohl „in derselben Richtung"), Engel und Stäckel „in gerader Linie", Mollweide „gerade fort" (schnureben von Pirkheimer).

Von Richtung steht kein Wort bei Euclid, erst bei Geminos findet sich (nach Proclus) die Erzeugung der Geraden durch „unge-

beugte" Bewegung, d. h. durch Bewegung ohne Richtungsänderung. Hätte Euclid sagen wollen: in gerader Linie, so hätte er ἐν mit dem Dativ genommen; ἐπὶ mit dem Genetiv bedeutet entweder „auf der Geraden" (wovon die begrenzte ein Teil ist) oder giebt bei den Verben der Bewegung das Ziel an, wie nach Thrazien gehen, oder, und so haben es Lorenz und Mollweide aufgefafst, es steht wie bei milit. Ausdrücken, wo unser „4 Mann hoch" mit ἐπὶ τεττάρων ausgedrückt wird; in allen diesen Fällen drückt es aus, dafs durch die Vorstellung des Teils, der Strecke, die des Ganzen, der Geraden, in der Anschauung erzeugt werden kann.

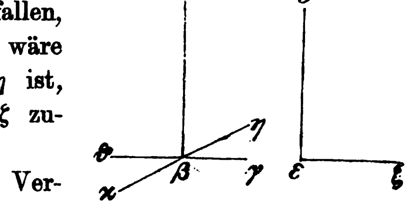
Die 1. Forderung sagt nach griechischem Sprachgebrauch im allgemeinen und dem des Euclid im besonderen, dafs hier die gröfstmöglichste Bestimmtheit herrscht, ausgedrückt durch den Wegfall des Artikels. Genau so, wie bei der Aufgabe Satz 11 und Satz 31, vgl. noch die Anmerkung zu Satz 31. Der bestimmte Artikel wird demonstrativ gebraucht, wenn auf ein Bestimmtes von vielen hingewiesen wird, gerade da, wo wir meistens den unbestimmten Artikel brauchen, also z. B. Satz 11 sagt Euclid: Hier in der gegebenen Geraden τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, wir sagen: Auf eine Gerade, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημαίου, von dem da auf ihr gegebenem Punkte, wir: von einem auf ihr etc. und fährt fort: πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν ἀγαγεῖν, ohne Artikel; wir sagen: Das Lot zu errichten. Proposition 16 steht μίας πλεῦρας, also das Zahlwort gerade, weil Vieldeutigkeit vorhanden ist.

Für unsere Auffassung von ἐπ' εὐθείας sprechen zahlreiche Stellen, z. B. die ἔκθεσις zu Satz 5, noch schärfer Satz 14, und besonders der Schlufs des Beweises, am schärfsten 44, die Konstruktion und dann der Beweis des Pythagoras 48. Die 1. Forderung sagt also aus, dafs zwischen zwei Punkten eine und nur eine Strecke möglich, die zweite, dafs durch eine Strecke die ganze Gerade eindeutig bestimmt ist. Forderung 2 hebt a) die Forderung der Unendlichkeit der Geraden noch einmal hervor, b) exemplifiziert sie das ἐξ ἴσου, insofern jede Strecke die ganze Gerade erzeugt, c) soll diese Forderung und nicht, wie Zeuthen will Nr. 4, die Eindeutigkeit der Fortsetzbarkeit aussprechen, bezw. wird sie als selbstverständlich (vgl. Schlufs der Definitionen) herübergenommen. Den Forderungen 1 und 2 schliefst sich noch die Definition 4 an, zusammen erst definieren sie die Gerade völlig und zwar nicht anschaulich, denn die Anschauung, das wiederhole ich, wird als selbstverständlich vorausgesetzt; zusammen sagen sie aus: die Gerade ist eine unterschiedslose und unendliche Linie, die

durch zwei ihrer Punkte völlig bestimmt ist. Ich verweise auch noch auf Duhamel (Les méthodes II p. 8, 9).

4) In der Annahme des Aorist folge ich Proclus wie August; die Handschriften (Heiberg) haben $\gamma\varrho\acute{\alpha}\varphi\varepsilon\sigma\vartheta\alpha\iota$.

5) Forderung 4 ist nach Proclus von Géminos und anderen angegriffen als beweisbar. Wir geben hier den Beweis des Géminos: Wäre $\alpha\beta\gamma > \delta\varepsilon\zeta$ und legte man $\delta\varepsilon\zeta$ auf $\alpha\beta\gamma$, so dafs $\alpha\beta$ und $\delta\varepsilon$ zusammenfallen, so fiele $\varepsilon\zeta$ als $\beta\eta$ innerhalb und dann wäre $\varkappa\beta\alpha$, das nach Vorigem gleich $\alpha\beta\eta$ ist, $> \vartheta\beta\alpha$, also auch $> \alpha\beta\gamma$, also $\delta\varepsilon\zeta$ zugleich kleiner und gröfser als $\alpha\beta\gamma$.



Der Beweis setzt voraus, dafs die Verlängerung von $\eta\beta$ sich nicht mit $\vartheta\beta$ decken könne, d. h. also, dafs eine Strecke sich nur auf eine Weise zu einer Geraden verlängern lasse. Darin hat Zeuthen recht, aber dies zu sagen wäre die Forderung einer seltsamen Form und Euclid hat eine ganze Anzahl stillschweigender Voraussetzungen, ohne die keine geon., d. h. anschauliche Geometrie existieren kann, bezw. hat er diese Forderung in Nr. 1 und 2 ausgesprochen. Dem „Geminos und den anderen" ist die strenge Arist. Auffassung der „Bewegung" verloren gegangen, der Beweis verlangt ja auch die Verschiebbarkeit und Drehung der Ebene in sich selbst, bezw. die dritte Dimension, und die will und kann Euclid von seinem Standpunkt nicht zu Hilfe nehmen; so bleibt ihm nur übrig, zur „Forderung" seine Zuflucht zu nehmen, welche ihm zugleich die Eindeutigkeit des Lotes in einem Punkte auf eine Gerade giebt und die Verschiebbarkeit etc. der Ebene ersetzt.

6) Forderung 5 ist das unter dem Namen des Parallelenaxioms (Parax) bekannte „Kreuz" der Mathematik, der „Flecken", mit dem nach Savile und Saccheri das grofse Werk des Euclid behaftet war, bis es durch Gaufs und Schweikart klar wurde, dafs sich, wie stets, aus der Wunde die Neubildung entwickeln mufste. Die Litteratur des Parax füllt bei Riccardi (Mem. d. Bol. S. V T. I. 1890) 20 Quartseiten. Ich nenne die erste selbständige Druckschrift, die des P. A. Cataldi, des Entdeckers der Kettenbrüche, von 1603, und die drei letzten mir bekannten, alle drei noch aus dem Jahre 1891, E. v. Schmidt, Euclids 11 Axiome durch eine neue Definition der geraden Linie bewiesen, Iselin, die Grundlagen der Geometrie und F. Pietzker, kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. Der Überblick über das Parax, den ich 1890 (gedruckt 1891) im Supple-

mentband der 4. Aufl. des Meyerschen Lexikons gab*), ist jetzt weit überholt durch die Darstellung bei Stäckel und Engel und diese wieder durch den Artikel von Robert Bonola in dem schönen Sammelband, den Enriques unter dem Titel Questioni riguard. la geom. elem. 1900 herausgegeben hat. Aber es ist eine Pflicht, hier der ersten kritischen Sichtung des Materials durch Klügel zu gedenken, der in seiner Dissertation Göttingen 1763 in der bescheidenen Form, wie es dem Anfänger ziemt, seiner Ansicht über die Unbeweisbarkeit des Axioms Ausdruck gab.

Die Forderung 5 heifst häufig 11. Axiom, weil sie in vielen Codices als solche steht, aber schon Zamberti hat sie richtig. Durch Proclus wissen wir, dafs sie eigentlich beständig angegriffen wurde, z. B. von Ptolemäus, und zwar ist der Grund klar. Die Erfahrung der Männer der Praxis schuf die Geometrie, die Geometrie vertiefte die angewandte Mathematik, aber die Skrupel eines Euclid über die Bewegung wurden von den Ingenieuren und Astronomen nicht geteilt; von ihrem Standpunkt aus war die Forderung des Euclid unanschaulich, da die wirkliche Bewegung das Nichtschneiden gar nicht, und das Schneiden in praxi meistens auch nicht konstatieren konnte. In dieser Hinsicht ist der Beweis von der Unrichtigkeit der Euklid. Forderung bei Proclus S. 570 ganz ungemein lehrreich. Euclid war weit schärfer. Er wollte, was Proclus ganz richtig bemerkt, den Satz B. I. 6: „in jedem Dreiecke sind zwei Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte" umkehren. Der Beweis gelang ihm, aller Bemühung ungeachtet, nicht, er erkannte, dafs hier eine neue Forderung nötig sei, um der Thatsache, dafs in unserm Raume zwei richtungsverschiedene Geraden sich nach unserer Anschauung schneiden, gerecht zu werden. Proclus kritisiert zuerst den Beweis des Ptolemäus, dann stellt er das Axiom auf: Der Abstand zweier hinlänglich entfernten Punkte, zweier sich schneidender Geraden wächst über jedes Mafs. Er beruft sich auf Aristoteles, der es aufgestellt „als er die Endlichkeit der Welt bewies", gerade dann ist es falsch! Proclus beweist dann: wenn eine Gerade die eine von zwei parallelen Geraden schneidet, so schneidet sie auch die andere. Das ist das Parax in der Fassung unserer Lehrbücher: Durch einen Punkt ist zu einer Geraden nur eine Parallele möglich. Die Kritik des Beweises durch Clavius, der sich Saccheri anschliefst, ist falsch; der Fehler liegt darin, dafs

*) Für die 5. Aufl. übernehme ich nur die Verantwortung für die Artikel von A bis O.

der Abstand zweier Nichtsichschneidender ebenfalls unendlich werden kann. Clavius ersetzt dann das Parax durch ein anderes, das er allerdings durch seine Auffassung der Definition 4 zu beweisen glaubt: Der Ort der Punkte, welche von einer Geraden gleichen Abstand haben, (die Abstandslinie), ist eine Gerade. Es mag gleich hier bemerkt werden, dafs alle die Beweisversuche darauf hinauskommen, das Parax des Euclid durch ein anderes zu ersetzen, bezw. es implicite enthalten. Beinahe unmittelbar klar ist, dafs das Parax des Euclid sich deckt:

1. mit der Existenz des Rechtecks oder, was dasselbe ist, mit dem Satz: Die Winkelsumme im Dreieck ist zwei Rechte,

2. mit der Existenz ähnlicher Dreiecke,

3. mit dem Satz: Der Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein Rechter,

4. mit dem Satz: Durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, ist stets ein Kreis möglich, oder, was dasselbe ist: Zwei Gerade, welche auf sich schneidender senkrecht stehen, schneiden sich ebenfalls.

Weniger unmittelbar ist die Identität bei der Fassung Legendre's: Durch jeden Punkt (nicht wie es bei Balzer 3. Aufl. irrtümlich heifst „durch einen“) im Innern eines Winkels läfst sich eine Gerade ziehen, welche beide Schenkel schneidet. Noch indirekter ist der Zusammenhang bei Gaufs (Brief an Bolyai 1799): wonach ein (einziges) geradliniges Dreieck, dessen Inhalt gröfser als jede gegebene Fläche, genügt zum Ersatz des Parax. Noch abstrakter ist die Fassung: Man kann mit Flächen rechnen, d. h. es gilt das kommutative und assoziative Gesetz, denn dies Axiom verlangt den Pythagoras und dieser das Parax (Simon 1890).

An Clavius schliefst sich Borelli, dessen Euclides restitutus seit 1658 rasch eine Reihe von Auflagen erlebte; hier findet sich die wesentliche Auffassung der Parallelen als Geraden, welche auf derselben dritten senkrecht stehen, sowie Wallis, der als Savilischer Professor von amtswegen sich mit Euclid beschäftigen mufste. Er gab 1651 eine Kritik der Parallelentheorie Nasur ed Dins und hielt 1665 eine Vorlesung in Oxford, wo er das Parax des Euclid durch die Forderung der Ähnlichkeit ersetzte. Von diesen Vorgängern, in erster Linie von seinem Ordensbruder Clavius, angeregt, folgt Saccheri, von dem die nichteuclidische Geometrie gezählt wird. Saccheri zeigt zuerst die aprioristische Gleichberechtigung dreier Geometrien, und indem er zwei widerlegt, bezw. zu widerlegen sucht, bleibt als dritte die Euclidische übrig. Auf Saccheri folgt Lambert, vielleicht das gröfste Genie des

18. Jahrh.; über Saccheri hinausgehend, bemerkt er, dafs die eine der beiden „fremden" Geometrien auf der Kugel, die andere auf einer imaginären Kugel ihre Gestaltung fände. Lambert und Saccheri zeigen sehr viel Übereinstimmung, das würde mich nicht veranlassen, an einen direkten Einflufs Saccheri's auf Lambert zu glauben, ich würde auch niemandem als mir selbst glauben, dafs, als ich 1890 meine Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf die abs. Geometrie schrieb, ich von Lambert keine Ahnung hatte. Aber Lambert wurde durch Klügel wieder an die Parallelentheorie erinnert, bei Klügel ist Saccheri besprochen; das Werk Saccheri's war schon durch seine Stellung im Orden ein verbreitetes; es ist eigentlich stets erwähnt worden, z. B. hat Pfleiderer S. 87 Saccheri und Lambert voll gewürdigt. Lambert lebte in Chur in engstem Zusammenhang mit der gelehrten Welt Churs, wo er den eigentlichen Grund zu seiner wissenschaftlichen Bedeutung gelegt hat, es wäre sehr unwahrscheinlich, dafs er in dieser speziell von jesuitischer Gelehrsamkeit durchtränkten Atmosphäre den Saccheri nicht kennen gelernt hätte.

Lamberts Abhandlung erschien als Nachlafs-Werk in Hindenburgs Archiv von 1786, dem angesehensten deutschen wissenschaftlichen Journal der Zeit; dafs Gaufs es las, wissen wir, und so wirkt das Gesetz der Kontinuität auf Gaufs, der als der erste die Zufälligkeit der euclid. Raumform erkannte, dem die logische Gleich- ja Überberechtigung der anderen Geometrien klar war, und der mit vollem Bewufstsein die Konsequenzen der logischen Unbeweisbarkeit der 5. Forderung zog.

Nur darf man nicht glauben, dafs Gaufs je an der thatsächlichen Richtigkeit des Satzes für unsern Raum gezweifelt habe, so wenig, wie an der der Dreidimensionalität des Raumes, obwohl er auch hier das logisch Hypothetische erkannte. Gaufs ist also der Begründer der nichteucl. Geometrie, obwohl er seiner Gewohnheit nach so gut wie nichts darüber veröffentlichte. Unabhängig von Gaufs gelangte etwa 1818 Schweikard zu einer von der 5. Forderung unabhängigen Geometrie. Zum Verständnis diene folgendes:

Es seien g und h zwei Gerade, welche auf derselben Dritten in A und B senkrecht stehen, dann sind zwei Hauptfälle denkbar, welche sich wieder in je zwei Unterfälle spalten: g und h können sich nicht schneiden, oder können sich schneiden. Im Falle 1) kann a) die Gerade h die einzige g Nichtschneidende durch A sein, b) kann ein ganzes Bündel davon existieren, gehälftet von h, welches von den Schneidenden durch zwei symmetrisch zu AB gelegenen Grenzgeraden

— die beiden Parallelen — getrennt wird. Im Falle 2) können g und h sich a) in seinem Punkte x schneiden, der dann links und rechts gleich weit von AB entfernt ist, oder b) in zwei Punkten x und y, symmetrisch zu AB gelegen. Zeigt man, dafs AB eine Mitte hat, so ist vermöge des Axioms von der Ebene leicht zu zeigen: Wenn einer dieser Fälle einmal eintritt, so mufs eben dieser immer eintreten. Je nachdem werden vier Geometrien als Euclidische, Lobatschewskische, Klein-Cliffordsche und Riemannsche unterschieden.

Die ersten, welche nichteucl. Geometrie veröffentlichten, waren Lobatschewski (Vortrag zu Kasan 12. Febr. 1826) und Johann Bolyai im Appendix 1832. Durch die Veröffentlichung von Riemann's Habilitationsvortrag: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen 1861, in der die Möglichkeit einer Endlichkeit des Raumes und einer n-Dimensionalität zugelassen wurde, wurde dann die Beschäftigung mit der Grundlage der Geometrie zu einer der brennendsten Tagesfragen.

Wir haben noch einen Seitenweg zu verfolgen:

Im Jahre 1639 (Brouillon project. ed. Poudra 1864) beseitigte der eigentliche Begründer der modernen projektiven Geometrie, Desargues, durch Einführung des unendlich fernen (uneigentlichen) Punktes den Unterschied zwischen sich schneidenden und parallelen Geraden. Da bei Projektion eigentliche und uneigentliche Punkte in einander übergehen, so wurden die bei beliebigen Projektionen bleibenden projektiven Eigenschaften als vom Parax unabhängig erfunden. Die Geometrie der Lage, welche in Staudt und Reye ihre hervorragendsten Vertreter fand, kam nun ebenfalls zu der Notwendigkeit Mafsbestimmungen projektiv zu definieren. Indem Cayley und Felix Klein die Möglichkeiten dieser Mafsbestimmungen untersuchten, ergaben sich ihnen wieder die verschiedenen Geometrien, welche nach Klein mit Rücksicht auf die Polarkurve bezw. Fläche Elliptische (Riemann, Klein), Parabolische (Euclid), Hyperbolische (Lobatschewski) Geometrie heifsen.

Jede der Geometrien hat, soweit sie planim., ihre Versinnlichung auf einer Fläche, die Riemannsche auf der Kugel, die Klein-Cliffordsche im Strahlenbüschel, die Euclidsche auf der Ebene (bezw. Halbkugel, wenn man $\frac{\pi}{2} = \infty$ setzt), die nichteucl. auf der Pseudosphäre bezw. im Innern eines Kegelschnitts. Die wesentlichen Abweichungen der nichteucl. Planimetrie von der gewöhnlichen sind:

1. Durch jeden Punkt giebt es zu jeder Geraden zwei Parallelen, oder die Gerade hat zwei uneigentliche unendlich ferne Punkte.

2. Im Dreieck ist die Winkelsumme kleiner als zwei Rechte.

3. Die Fläche des Dreiecks ist dem sphärischen Exzeſs

$$(\pi - (\alpha + \beta + \gamma))$$

proportional, und es giebt ein absolut gröſstes Dreieck mit der Winkelsumme 0.

4. Der Ort der Punkte, die von einer Geraden gleichen Abstand haben, ist eine Kurve, deren Tangente auf den Loten senkrecht steht.

5. Der Kreis mit unendlich groſsem Radius ist keine Gerade, sondern eine, wie die Abstandslinien, in sich verschiebbare Kurve Grenzkreis.

6. Zwei Nichtsichschneidende besitzen eine gemeinsame Senkrechte.

7. Alle Streifen (d. h. Stücke der Ebene zwischen zwei Parallelen) sind kongruent.

8. Der Parallelenwinkel hängt von der Distanz und einer Konstanten ab.

Das Verdienst, die Lehrer Deutschlands auf die neue Entwickelung hingewiesen zu haben, hat zunächst Balzer, der sie, wie auch Frischauf Elem. der abs. Geometrie 1876, wohl durch Hoüel's französische Übersetzung kennen lernte. Balzer hat Legendre (Noten), Lobatschewski, Bolyai in seinen Elementen der Mathematik erwähnt, die leider stark in Vergessenheit geraten zu sein scheinen. Wie gering das Verständnis für das System und die Verkettung und gegenseitige Abhängigkeit der Voraussetzungen, welche der Geometrie zugrunde liegen, noch heute ist, bewies ein Vortrag, den vor wenigen Jahren Herr Schotten unter dem Beifall der Zuhörer im Verein für Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts hielt.

Grundsätze.[1]

1) Was demselben [dritten] gleich ist, ist unter sich gleich.[2])

2) Und wird Gleiches zu Gleichem hinzugesetzt, so sind die Ganzen gleich.

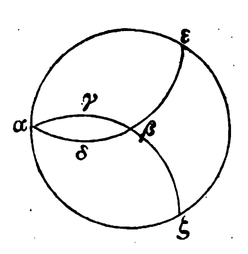
3) Und wird [Gleiches] von Gleichem weggenommen, so sind die Reste gleich.

8) Und das Ganze ist gröſser als sein Teil.[3])

7) Und einander Deckendes ist gleich.[4])

Anmerkungen.

1) Euclid hat κοιναὶ ἔννοιαι. „Allen Vernünftigen gemeinsame Annahme". Proclus „Axiome" eigentlich „Meinungen", aber nach dem Sprachgebrauch des Aristoteles allgemein angenommene logische Sätze, die man nicht beweisen kann, weil sie die logischen Grundlagen des Beweises sind. Proclus hat nur die fünf angeführten, und korrekterweise 8 vor 7, da 7) nicht rein logisch ist, sondern von dem Zusammenfallen in der Anschauung ausgeht, um daraus den logischen Schlufs der Gleichheit zu ziehen. Proclus erwähnt die apokryphen 4, 5, 6, 9, von denen 9 (in etwas anderer Form bei Proclus): Gleiches zu Ungleichem giebt Ungleiches, nach Proclus von Pappus herrührt, 5 und 6 offenbar überflüssig sind und 9): Zwei Gerade schliefsen keinen Raum ein, unter die Forderungen gehört, wo er sich auch oft findet, und von Proclus als überflüssig bekämpft wird. Den Beweis von Proclus (F. S. 239) macht die Figur klar: Wenn $\alpha\delta\beta\varepsilon$ und $\alpha\gamma\beta\zeta$ zwei Durchmesser wären, so müfsten die Bogen $\alpha\varepsilon$ und $\alpha\varepsilon\zeta$ gleich sein, was unmöglich (aufser, wenn wie in der Riemannschen Raumform beide gleich 0 sein könnten); aber Proclus setzt hinzu: Der „Stoicheiotes", der das wufste (nämlich: zwei Gerade etc.), sagte in der 1. Forderung, dafs sich von jedem Punkt zu jedem Punkt eine gerade Linie ziehen lasse, d. h. dafs eine Gerade stets die beiden Punkte verbinden könne, aber nicht zwei. Somit ist also meine Auslegung der Forderung 1 durch Proclus bestätigt.



2) Das Wort „Gröfse" ist vermieden, Proclus erklärt die Unbestimmtheit, die in dem Plural des Neutr. liegt, ganz richtig mit der allgemeinen Giltigkeit für Raum, Zahl, Zeit etc.

3) Axiom 4 gilt nur für endliche Gröfsen, in der nichteucl. Geometrie ist der halbe Streifen dem Ganzen kongruent; in der Euclidischen kann das Parax auch ersetzt werden durch den Satz: Mit den unendlichen Flächengröfsen kann nach den für endliche giltigen Regeln gerechnet werden, was Euclid übrigens ganz naiv thut, z. B. 1. Prp. 15.

4) Axiom 7 ist von Schopenhauer „Welt als W. u. V." Th. 2 S. 143 angegriffen, weil es entweder eine Tautologie ist oder Bewegung voraussetzt. Es ist von Bolzano und Grafsmann durch das Prinzip: „Dinge, deren bestimmende Stücke gleich sind, sind gleich" ersetzt. Sch. hat Euclid gar nicht verstanden, Euclid braucht Axiom 7 zuerst

beim Beweis des ersten Satzes. Nur aus diesem Axiom folgt, dafs $AB = BA$ ist, ein Satz, an dessen rein logischem Beweis verzweifelnd, Bolzano die rein logische Begründung der Geometrie aufgab.

Technologie.

Es folgen nun die 48 „Protasis“ (Propositionen, Sätze) des ersten Buches. Die Sätze zerfallen in „Probleme“ [Aufgaben, die zur Erzeugung (γενεσις) eines Gebildes führen] und „Theoreme“ (Lehrsätze). Den Unterschied definiert Proclus (S. 201), wo er von der „Technologie“ des Euclid, um mit Tannery (Géom. grecque 1887) zu sprechen, handelt, wie folgt: „Bei den Problemen handelt es sich darum, Fehlendes sich zu beschaffen, anschaulich hinzustellen und mit den Kunstmitteln (Lineal und Zirkel) zu erzeugen. Im „Theorem“ nimmt man sich vor das Vorhandensein einer Eigenschaft bezw. das Nichtvorhandensein zu sehen, zu erkennen, zu beweisen. Jedes Problem aber und jedes Theorem, das aus seinen vollständigen Teilen zusammengesetzt ist, mufs folgendes in sich enthalten: 1) Vorlage (Prótasis), 2) Feststellung des Gegebenen (ékthesis), Voraussetzung, 3) Feststellung des Geforderten (Diorismós), Behauptung, 4) Konstruktion (Kataskeuē), 5) Beweis (Apódeixis), 6) Schlufs (Sympérasma). „Die Protasis sagt aus, was gegeben und was gefordert wird, denn die vollständige Protasis besteht aus beidem. Die Ekthesis [Voraussetzung] setzt das Gegebene an und für sich [d h. ohne Rücksicht auf das Geforderte] genau auseinander und arbeitet dadurch der Untersuchung vor. Der Diorismos [Forderung, Behauptung] aber macht das Gesuchte, es sei, was es sei, an und für sich deutlich.“ Der Ausdruck Diorismos wird hier bei Proclus anders gebraucht, wie bei Pappus; Peyrard hat Prodior. Bei Pappus bezeichnet Diorismos genau das, was wir heute Determination nennen, d. h. die Angabe derjenigen Einschränkungen in Bezug auf die gegebenen Stücke, welche zur Ausführbarkeit der Konstruktion nötig sind. Die Kataskeue fügt das hinzu, was dem Gegebenen zur Erlangung des Gesuchten mangelt. Proclus sagt zur „Jagd“ (ϑηραν), und braucht das Bild wiederholt, so alt ist das Bewufstsein des Kampfes des Mathematikers mit seinem Problem. Die Apodeixis leitet das Vorliegende logisch von dem, was bereits

feststeht, ab. Das Symperasma aber kehrt wieder zur Vorlage zurück, indem es den bewiesenen Satz klar und deutlich ausspricht. Und dies sind alle Teile, sowohl der Probleme als der Theoreme.

Am notwendigsten aber und in allen vorhanden sind die Vorlage, der Beweis und der Schlufs. Denn man mufs a) vorher wissen, was zu suchen ist, und b) es durch eine Kette von Schlüssen beweisen, und c) das Resultat einsammeln. Die andern Teile fehlen mitunter, wie Diorismos und Ekthesis bei dem Problem: Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, worin jeder Basiswinkel das doppelte des Winkels an der Spitze.

Dies tritt ein, sagt Proclus, wenn die Vorlage kein Gegebenes (wir sagen keine Voraussetzung) enthält (d. h. wenn es ausgelassen ist, wie in dem c. Beispiel die Basis des Dreiecks), wie oft in den arithmetischen Büchern und im Buch 10, Satz 29: Eine 4. Wurzel zu konstruieren (bei gegebener, aber nicht erwähnter Einheitsstrecke). Und Proclus sagt auch den Grund: Das Gegebene fehlt (d. h. ist als selbstverständlich verschwiegen) und der Diorismos würde zu einer einfachen Wiederholung der Vorlage. Die Konstruktion aber fehlt in weitaus den meisten Theoremen, da die Ekthesis hinreicht, um ohne einen Zusatz (scl. von Zeichnung) das Vorgesetzte [d. i. die Figur, um die es sich handelt] sichtbar zu machen.

Hin und wieder finden sich Hilfssätze, Lēmma und Zugaben, Pórisma. Lemma ist eigentlich in der Geometrie ein Satz, der [noch] des Beweises bedarf, den wir für eine Konstruktion und einen Beweis einstweilen annehmen, vorbehaltlich des Beweises, und der sich durch diesen Vorbehalt von den Axiomen und Forderungen unterscheidet, welche wir, ohne dafs sie bewiesen, zur Rechtfertigung anderer Sätze herbeiziehen. Porisma ist ein Zusatz, der sich beim Beweis eines anderen als eine „Gottesgabe" ungewollt von selbst ergiebt, im wesentlichen also eine andere Fassung des bewiesenen Satzes. Übrigens sind die meisten Lemma und Porisma verdächtig, so fehlt z. B. das Porisma zu 1, 15, obwohl es sich bei Proclus findet, in den besten Handschriften. Bei Gelegenheit dieses Porisma geht Proclus auch auf die andere Bedeutung des Wortes „Porisma" ein (vgl. S. 5). Demnach handelt es sich bei dem Porisma darum, etwas, dessen Existenz feststeht, zu finden, während bei dem Problem durch die Konstruktion auch die genesis gegeben, d. h. die Frage der Existenz entschieden wird. Proclus führt als Beispiel vom Porisma an: Das Zentrum eines gegebenen Kreises zu finden und zu zwei kommensurablen Strecken das gröfste gemeinsame Mafs zu finden.

Zu bemerken ist, daſs in den guten Handschriften, abgesehen vom Vaticanus, sich weder Überschriften noch Bezeichnungen der einzelnen Teile finden, die Sätze sind numeriert, und selbst dies ist vermutlich nicht Original, da Euclid nicht auf die betreffende Nummer verweist, sondern den einschlagenden Satz vollständig angiebt. Das Schleppende der Darstellung veranlaſste vermutlich die Bezifferung und zwang zu Abkürzungen. Übrigens erklärt sich die Breite, wenn man sich vergegenwärtigt, daſs das Original zum mündlichen Vortrag im Kolleg vor Studenten der Universität Alexandria bestimmt war.

[Satz] 1.

[Aufgabe.] **Auf einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu errichten.**

[Voraussetzung.] Gegeben sei die Strecke AB.

[Forderung.] Es ist erforderlich, auf der Strecke AB ein gleichseitiges Dreieck zu errichten.

[Konstruktion.] Um das Zentrum A werde mit dem Radius AB der Kreis $B\Gamma\Delta$ beschrieben und wiederum um das Zentrum B mit dem Radius BA der Kreis $A\Gamma E$, und von Γ, dem Punkt, in welchem sich die Kreise schneiden, mögen nach den Punkten A, B die Verbindungsgeraden ΓA, ΓB gezogen werden (Fig. 1).

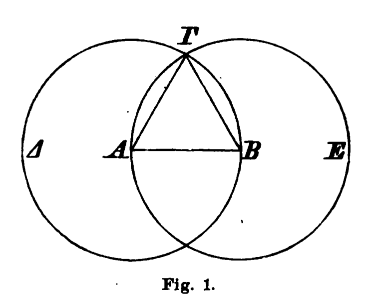


Fig. 1.

[Beweis.] Und da Punkt A Zentrum des Kreises $\Gamma\Delta B$ ist, ist (die) $A\Gamma$ gleich (der) AB; wiederum, da Punkt B Zentrum des Kreises ΓAE ist, ist $B\Gamma$ gleich BA. Es wurde aber gezeigt, daſs auch ΓA gleich AB. Jede von beiden ΓA, ΓB ist also AB gleich. Demselben gleiches ist aber unter sich gleich; folglich ist auch ΓA gleich ΓB. Also sind die drei, nämlich ΓA, AB, $B\Gamma$ einander gleich.

[Schluſs.] Also ist das Dreieck $AB\Gamma$ gleichseitig und steht auf der gegebenen Strecke AB. Was zu bewirken war.

Zu bemerken ist, daſs Euclid aus der **Anschauung** entnimmt, daſs die Kreise sich schneiden, und aus Axiom 5, daſs AB gleich BA ist.

2.

Von einem gegebenen Punkt eine Strecke, welche einer gegebenen gleich ist, zu ziehen.

Es sei der gegebene Punkt A, die gegebene Strecke $B\Gamma$.

Gefordert von Punkt A eine der gegebenen Strecke $B\Gamma$ gleiche Strecke zu ziehen.

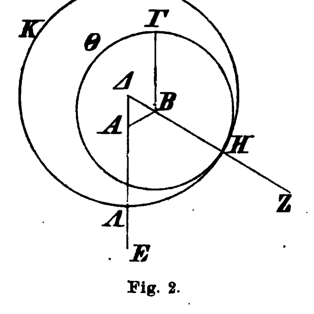


Fig. 2.

Es werde A mit B durch die Strecke AB verbunden, und auf ihr das gleichseitige Dreieck ΔAB errichtet, und ΔA, ΔB um AE, BZ verlängert und um das Zentrum B mit dem Radius $B\Gamma$ der Kreis beschrieben $\Gamma H\Theta$ und dann um das Zentrum Δ mit dem Radius ΔH der Kreis $HK\Lambda$.

Da nun B Zentrum des Kreises $\Gamma H\Theta$ ist, so ist $B\Gamma$ gleich BH, ferner, da Δ Zentrum des Kreises $HK\Lambda$ ist, so ist $\Delta\Lambda = \Delta H$, deren Stücke ΔA und ΔB gleich sind. Der Rest $A\Lambda$ ist also dem Rest BH gleich. Es wurde aber $B\Gamma$ als BH gleich erwiesen. Jede von den beiden $A\Lambda$ und $B\Gamma$ ist also BH gleich. Aber demselben gleiches ist unter sich gleich. Folglich ist auch $A\Lambda$ gleich $B\Gamma$.

Es ist also an Punkt A die der gegebenen Strecke $B\Gamma$ gleiche Strecke $A\Lambda$ angelegt; w. z. bewirken war.

3.

Wenn zwei ungleiche Strecken gegeben sind, von der gröſseren eine der kleineren gleiche Strecke abzuschneiden.

(Fig. 3.) Es mögen AB und Γ die gegebenen Strecken sein, von denen AB die gröſsere ist. Gefordert etc.

Lege an A eine Γ gleiche Strecke $A\Delta$ an; beschreibe um A mit dem Radius $A\Delta$ den Kreis ΔEZ.

Fig. 3.

Und da A Zentrum des Kreises ΔEZ, so ist $AE = A\Delta$, aber auch $\Gamma = A\Delta$, daher sind beide Strecken AE, Γ der Strecke $A\Delta$ gleich, also auch $AE = \Gamma$. Also ist etc. . . . ., w. z. bewk. war.

4.

Wenn zwei Dreiecke in zwei Seitenpaaren und den von ihnen eingeschlossenen Winkeln übereinstimmen, so sind auch die dritten Seiten gleich, und die Dreiecke sind gleich [der Fläche nach] und die Winkel sind gleich, welche den gleichen Seiten gegenüberliegen.

Es seien $AB\Gamma$, ΔEZ zwei Dreiecke (Fig. 4), so dafs $AB = \Delta E$; und $A\Gamma = \Delta Z$ und $\sphericalangle\, BA\Gamma = E\Delta Z$. Ich behaupte, dafs noch $B\Gamma = EZ$ und $\triangle AB\Gamma = \Delta EZ$ und $\sphericalangle\, AB\Gamma = \Delta EZ$ und $A\Gamma B = \Delta ZE$.

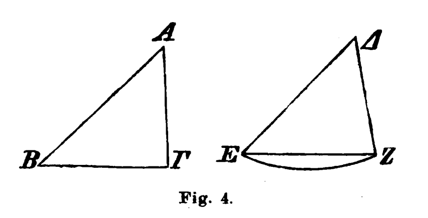


Fig. 4.

Denn wenn das Dreieck $AB\Gamma$ auf das Dreieck ΔEZ gelegt wird und zwar Punkt A auf Punkt Δ und Strecke AB auf ΔE, so wird auch Punkt B auf E fallen, wegen der Gleichheit von AB und ΔE. Nachdem aber AB auf ΔE gefallen ist, wird auch der Strahl $A\Gamma$ auf ΔZ fallen, wegen der Gleichheit der Winkel $BA\Gamma$ und $E\Delta Z$; so dafs auch Punkt Γ auf Punkt Z fallen wird, weil wiederum Strecke $A\Gamma = \Delta Z$ ist. Es war ja aber schon B auf E gefallen; daher wird die Basis $B\Gamma$ auf die Basis EZ fallen. Denn wenn, nachdem B auf E, Γ auf Z gefallen ist, die Strecken $B\Gamma$ und EZ nicht zusammenfallen würden, dann würden zwei Gerade einen Raum einschliefsen, was unmöglich ist. Folglich wird die Basis $B\Gamma$ auf EZ fallen, und wird so ihr gleich sein, so dafs noch das ganze Dreieck $AB\Gamma$ mit dem ganzen Dreieck ΔEZ zusammenfallen wird und ihm gleich sein wird, und die übrigen Winkel sich auf die übrigen legen und ihnen gleich sein werden, und zwar $\sphericalangle\, AB\Gamma$ dem Winkel ΔEZ und $A\Gamma B$ dem $\sphericalangle\, \Delta ZE$.

Wenn also zwei Dreiecke in zwei Seiten etc. . . . .

Was zu beweisen war.

Beim Beweis dieses Satzes, des ersten Kongruenzsatzes, ist die Bewegung zu Hilfe genommen, und zwar nur bei diesem planimetrischen Satz und seiner Umkehrung I, 8. Der ganze Beweis macht schon wegen der späteren Fassung des Axioms 1: Zwei Gerade schliefsen keinen Raum ein, den Eindruck einer späteren Redaktion; vielleicht durch Heron, dem als Mechaniker die Bewegung das Vertrauteste war. Getadelt ist von Savile die Deckung der Winkel, da noch nicht gelehrt ist, wie man einen Winkel anträgt. Merkwürdiger-

weise hat weder Proclus noch Savile, nach Pfleiderer, der so fleifsige Scholiast, auf die auffällige Anwendung der Bewegung hingewiesen. Sieht man näher zu, so ist nichts weiter benutzt als das stillschweigend angenommene Axiom von der Gleichförmigkeit des Raumes, demzufolge jede Figur, die an einer Stelle des Raumes möglich ist, auch an einer andern möglich ist, bezw. das Axiom Bolzano's und Grafsmann's: Gröfsen, deren bestimmende Stücke gleich sind, sind gleich. Die Kongruenz der dritten Seiten würde aus der Forderung 1: nach der zwischen je zwei Punkten eine Gerade vorhanden, sofort hervorgehen. Stillschweigend wird auch die Gleichheit zweier Winkel definiert: Winkel sind gleich, wenn sich ihre Schenkel decken.

Dafs Euclid die Kongruenzsätze nicht unter die Forderungen aufgenommen hat, ist ein Fehler.

5.

Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Basis einander gleich, und werden die gleichen Schenkel verlängert, so sind auch die Winkel unterhalb der Basis einander gleich.

(Fig. 5.) Sei $AB\Gamma$ das gleichschenklige Dreieck mit AB gleich $A\Gamma$ und es mögen auf ihren Geraden AB und $A\Gamma$ verlängert werden um $B\Delta$ und ΓE. Ich behaupte etc.

[Konstr.] Man nehme auf $B\Delta$ einen beliebigen Punkt Z, von AE nehme man AH gleich AZ weg und ziehe $Z\Gamma$ und HB.

[Beweis.] Dann ist $\triangle AZ\Gamma \simeq AHB$ [4] folglich $\sphericalangle A\Gamma Z = ABH$ und $\sphericalangle AZ\Gamma = AHB$, und da $AZ = AH$ und ihr Teil AB und $A\Gamma$ auch gleich, so ist (Ax. 3) $BZ = \Gamma H$; und da bereits bewiesen, dafs $Z\Gamma = HB$ und $\sphericalangle BZ\Gamma = \Gamma HB$, so ist [4] Dreieck $BZ\Gamma \simeq BH\Gamma$, folglich $\sphericalangle ZB\Gamma = H\Gamma B$ und $B\Gamma Z = \Gamma BH$. Da nun der ganze Winkel ABH als dem ganzen Winkel $A\Gamma Z$ gleich erwiesen wurde, und die Teile ΓBH und $B\Gamma Z$ gleich, so ist [Ax. 3] $\sphericalangle AB\Gamma = A\Gamma B$ und dies sind die Basiswinkel. Aber die Gleichheit von $ZB\Gamma$ und $H\Gamma B$ wurde schon gezeigt und sie liegen unterhalb der Basis.

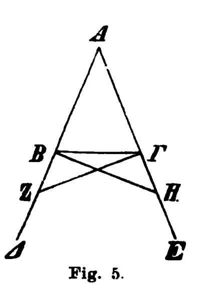


Fig. 5.

Also etc. . . . . w. z. b. w.

Aus Proclus ersehen wir, das wir für den Satz über die Gleichheit der Basiswinkel „dem alten Thales Dank schulden“. Proclus giebt einen Beweis für die Gleichheit der Basiswinkel ohne die Schenkel zu verlängern und er giebt aus dem Kommentar des Pappus (s. S. 250) den berühmten Beweis Bolzano's (wenn ich nicht irre auch Leibniz), der darauf hinauskommt, dafs sich beim gleichschenkligen Dreieck links und rechts nicht unterscheiden läfst. Proclus fügt dann die Erweiterung der Geminos hinzu: Gleiche Schenkel bilden mit jeder in sich verschiebbaren Linie gleiche Winkel.

6.

Wenn in einem Dreieck zwei Winkel einander gleich sind, so sind auch die Seiten, welche sich unter den gleichen Winkeln unterspannen, einander gleich.

Es soll $AB\Gamma$ das Dreieck sein, worin der Winkel (Fig. 6) $AB\Gamma$ dem Winkel $A\Gamma B$ gleich ist; ich behaupte, dafs auch die Seite AB der Seite $A\Gamma$ gleich ist.

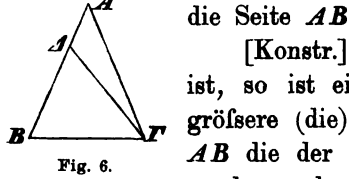


Fig. 6.

[Konstr.] Denn: wenn die AB der $A\Gamma$ ungleich ist, so ist eine der beiden die gröfsere. Es soll die gröfsere (die) AB sein und es soll von der gröfseren AB die der kleineren $A\Gamma$ gleiche $B\Delta$ weggenommen werden und es werde die Verbindung $\Delta\Gamma$ gezogen.

[Beweis, abgekürzt.] $A\Gamma B$ (nach 4) $\simeq \Delta B\Gamma$, der Teil dem Ganzen, was unschicklich; also ist AB nicht ungleich $A\Gamma$, also gleich.

Wenn also . . . . w. z. b. w.

Satz 6 ist das erste Beispiel eines Satzes, der indirekt (apagogisch), d. h. durch Hinleitung (apagoge) zum Unmöglichen bewiesen wird, für Umkehrungssätze die gewöhnliche Art des Beweises. Proclus beweist auch die zweite Umkehrung.

7.

Wenn über einer geraden Linie AB an derselben Seite die Dreiecke $A\Gamma B$ und $A\Delta B$ stehen, so kann nicht zugleich $A\Gamma$ gleich $A\Delta$ und $B\Gamma$ gleich $B\Delta$ sein.

(Fig. 7.) Man ziehe $\Gamma\Delta$, dann ist $\sphericalangle A\Gamma\Delta = A\Delta\Gamma$ (5), also $B\Gamma\Delta$ kleiner als $\Gamma\Delta A$ und um so mehr kleiner als $\Gamma\Delta B$, und diesen (nach 5) gleich, was unmöglich ist.

Fig. 7.

Im Euclid ist scheinbar der Fall nicht berücksichtigt, dafs die Spitze des einen Dreiecks innerhalb des andern falle. Proclus hat diesen Fall und bemerkt ganz richtig, dafs der Stoicheiotes um seinetwillen im Satze 6 die Gleicheit der Winkel unter der Basis beweise. Ebenso richtig bemerkt Proclus, dafs Satz 7 ein Hilfssatz, Lemma, zu Satz 8, dem sogen. 3. Kongruenzsatz; Peyrard hat durch eine leichte Änderung der Figur, welche von Hartwig in der letzten Schulausgabe des Lorenz 1860 adoptiert ist, den Beweis für beide Fälle zugleich gegeben.

8.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seitenpaare einzeln einander gleich sind, und die Grundlinie desgleichen, so sind die von den gleichen Seitenpaaren eingeschlossenen Winkel gleich.

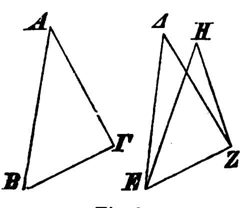


Fig. 8.

(Fig. 8.) $AB = \Delta E$ und $A\Gamma = \Delta Z$ und aufserdem soll $B\Gamma = EZ$ sein. Ich behaupte, dafs $\sphericalangle\, BA\Gamma = E\Delta Z$.

[Beweis ohne Zuhilfenahme der Bewegung.] Da $B\Gamma = EZ$, so kann man wegen der Gleichförmigkeit des Raumes das Dreieck $BA\Gamma$ in der Lage EHZ denken, dann mufs nach dem Lemma (S. 7) H auf Δ fallen.

Euclid beweist den sogen. 3. Kongruenzsatz dadurch, dafs er das Dreieck $AB\Gamma$ mit $B\Gamma$ auf EZ legt; Proclus giebt als Beweis des Philon den heut meist gebrauchten Beweis durch Aneinanderlegen. Proclus hebt mit Recht hervor, dafs Euclid nicht nötig hat, wie Philon, drei verschiedene Fälle zu unterscheiden. Proclus hebt schon die nahe Verwandtschaft des ersten und dritten Kongruenzsatzes hervor (Umkehrung von einander) und zeigt, wie der ganze Gang des Euclid durch den ersten und dritten Kongruenzsatz bestimmt wird.

9.

[4. Aufgabe.] Einen gegebenen Winkel zu halbieren.
(Fig. 9.) Sei $BA\Gamma$ der gegebene Winkel. Gefordert etc. . . . .
Nimm auf AB beliebig den Punkt Δ und schneide auf $A\Gamma$ eine

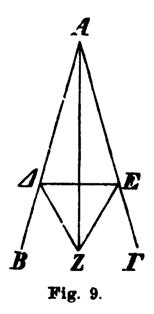


Fig. 9.

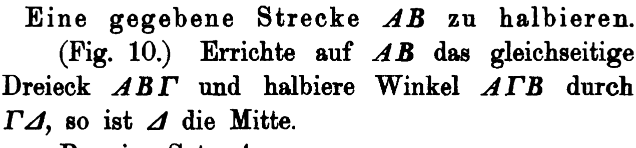
$A\Delta$ gleiche Strecke AE ab und ziehe ΔE und errichte auf ΔE das gleichseitige Dreieck ΔEZ und ziehe AZ. Ich behaupte, dafs AZ den Winkel $BA\Gamma$ halbieret.

[Beweis.] Dreieck $\Delta AZ \cong EAZ$ (8).

Dafs Z innerhalb des Winkels $BA\Gamma$ fallen mufs, wird von Proclus bewiesen, der auch schon für einen speziellen Fall die einfache Konstruktion mittelst zwei Kreisen giebt.

10.

[5. Aufgabe.]


Eine gegebene Strecke AB zu halbieren. (Fig. 10.) Errichte auf AB das gleichseitige Dreieck $AB\Gamma$ und halbiere Winkel $A\Gamma B$ durch $\Gamma\Delta$, so ist Δ die Mitte.

Beweis: Satz 4.

Fig. 10.

Aus der Anschauung wird stillschweigend entnommen, dafs $\Gamma\Delta$ die Strecke schneide. Von Proclus erfahren wir, dafs unsere Konstruktion, mittelst der Kreise um A mit AB und um B mit BA die Strecke zu halbieren, von keinem geringeren als dem Apollonius herrührt.

11.

Zu einer gegebenen Geraden AB von einem auf ihr gegebenen Punkt Γ aus die senkrechte Gerade zu ziehen.

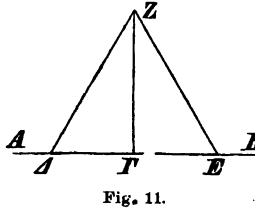


Fig. 11.

(Fig. 11.) Man nehme auf $A\Gamma$ beliebig Punkt Δ, und mache ΓE gleich $\Gamma\Delta$; und errichte auf der (Strecke) ΔE das gleichseitige Dreieck ΔZE und verbinde Z mit Γ, so ist $Z\Gamma$ die verlangte Senkrechte.

[Beweis.] $\Delta\Gamma Z \cong E\Gamma Z$ (8), also $\measuredangle \Delta\Gamma Z = E\Gamma Z$. Was zu thun war.

Proclus giebt schon eine Lösung für den Fall, dafs der Strahl $\Gamma\Delta$ nicht über Γ verlängert werden darf; die bekannte Lösung mittels des Peripheriewinkelsatz bei Clavius.

12.

Nach einer gegebenen unbegrenzten Geraden AB von einem gegebenen Punkt Γ, der nicht auf ihr liegt, die senkrechte Gerade (Kathete) zu ziehen.

(Fig. 12.) Nimm auf der andern Seite der Geraden AB den Punkt Δ und schlage um Γ mit $\Gamma\Delta$ den Kreis EZH, halbiere EH in Θ, und ziehe ΓH, $\Gamma\Theta$, ΓE; so ist $\Gamma\Theta$ die verlangte Senkrechte.

[Beweis.] $H\Theta\Gamma \cong \Gamma\Theta E$ (8).

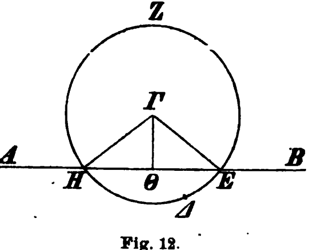


Fig. 12.

Proclus. „Dies Problem untersuchte zuerst Oinopides, der es für die Astrologie (die Astronomie) nützlich hielt.“ Er nannte aber die Kathete altertümlich „nach Art des Gnomon“, weil ja der Gnomon auf dem Horizont senkrecht steht.

13.

[Lehrsatz 6.] Wie auch ein Strahl, der von einer Geraden ausgeht, mit ihr Winkel bilde, so wird er zwei Rechte oder zwei Rechten gleiche Winkel bilden.

(Fig. 13.) Die Gerade sei $\Delta\Gamma$, der Strahl AB, die Winkel sind ΓBA, $AB\Delta$. Sind sie gleich, so sind es zwei Rechte (Df. 10); ist ΓBA der kleinere, so errichte man in B das Lot BE auf $\Delta\Gamma$, also sind ΓBE und $EB\Delta$ zwei Rechte. Und da $\Gamma BE = \Gamma BA + ABE$, werde auf beiden Seiten $EB\Delta$ hinzugelegt; also $\Gamma BE + EB\Delta = \Gamma BA + ABE + EB\Delta$. Andererseits da $\Delta BA = \Delta BE + EBA$, werde gemeinsam $AB\Gamma$ hinzugefügt, also $\Delta BA + AB\Gamma = \Delta BE + EBA + AB\Gamma$. Aber es wurde gezeigt, dafs auch $\Gamma BE + EB\Delta$ diesem Trinom gleich sei, also $\Delta BA + AB\Gamma = \Gamma BE + EB\Delta = 2$ Rechte. W. z. b. w.

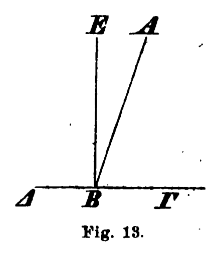


Fig. 13.

Dafs dieser Beweis vom heutigen Standpunkt aus fehlerhaft ist, braucht kaum bemerkt zu werden. Es fehlt der Nachweis, dafs man mit Winkeln nach den gewöhnlichen Regeln rechnen könne, speziell der Nachweis des kommutativen und assoziativen Gesetzes der Addition.

14.

[Lehrsatz: Umkehrung von 13.] Wenn zwei Winkel den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben und zusammen zwei Rechte betragen, so sind die äufseren Schenkel die Verlängerungen von einander.

Fig. 14.

Beweis indirekt (Fig. 14).

15.

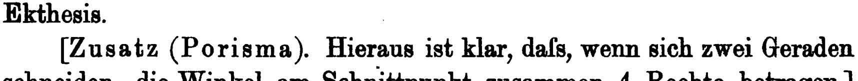
Wenn zwei Geraden einander schneiden, so sind die Schnittwinkel gleich.

(Fig. 18.) Die beiden Geraden AB und $\Gamma\Delta$ schneiden sich in E, ich behaupte, dafs $AE\Gamma = \Delta EB$ und $\Gamma EB = AE\Delta$.

$\Gamma EA + AE\Delta = AE\Delta + \Delta EB$, weil beide nach 13 gleich 2 Rechte, also (Ax. 5) $\Gamma EA = \Delta EB$ etc.

Fig. 15.

Vgl. die Bemerkung zu Satz 13; die Scheitelwinkel werden nicht erklärt, sondern einfach als Winkel „κατὰ κορυφὴν“, die Winkel „in Bezug auf den Scheitel“ bezeichnet; was gemeint ist, sagt die Ekthesis.



[Zusatz (Porisma). Hieraus ist klar, dafs, wenn sich zwei Geraden schneiden, die Winkel am Schnittpunkt zusammen 4 Rechte betragen.]

Das Porisma fehlt im Vaticanus, im Wiener, im Bologner Kodex, dagegen hat es Proclus, der es zu dem Satz erweitert: Alle Winkel um einen Punkt herum betragen zusammen 4 Rechte. Der Zusammenhang bei Proclus läfst die Vermutung zu, dafs das Porisma von Pythagoräern (d. h. Neupythagoräern) in den Euclid hineingebracht ist: „es ist bei einem Jahrhunderte lang gebrauchten Schulbuch fast unmöglich, den ursprünglichen Text festzustellen“ (Nöldeke).

16.

[Lehrsatz 9.] In jedem Dreieck ist, wenn eine Seite verlängert wird, der Winkel aufserhalb des Dreiecks gröfser als jeder von beiden der inneren ihm entgegengesetzten.

(Fig. 16.) $AB\Gamma$ sei das Dreieck und $B\Gamma$ werde bis Δ verlängert; ich behaupte etc.

[Konstr.] $A\Gamma$ werde in E halbiert (10) und BE werde um sich selbst verlängert bis Z, ΓZ gezogen und $A\Gamma$ bis H verlängert.

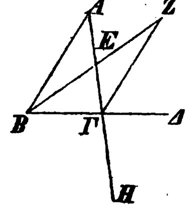


Fig. 16.

[Beweis.] Dreieck $AEB \simeq \Gamma EZ$ (4) und folglich $\sphericalangle\, BAE = E\Gamma Z$; also $\sphericalangle\, A\Gamma\Delta > BAE$; auf gleiche Weise wird durch Halbierung von $B\Gamma$ bewiesen, dafs $A\Gamma\Delta > AB\Gamma$. Also etc. . . . . w. z. b. w.

Dieser schöne Beweis ist von Legendre benutzt worden zu dem Beweis des Satzes, in jedem Dreieck ist die Winkelsumme nicht gröfser als zwei Rechte; aus ihm folgt sofort (von einigen wie Proclus sagt mit ihm verbunden)

17.

In jedem Dreieck sind zwei Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte (Fig. 17).

Proclus fügt zu 16 hinzu, dafs aus ihm sowohl folgt: Von einem Punkt kann man nicht drei gleich lange Linien nach einer Geraden ziehen; als der Satz: Wenn zwei Gerade von einer dritten unter gleichen Gegenwinkeln geschnitten werden, so schneiden sich jene beiden nicht. Und aus 17 folgt: Von einem Punkte lassen sich mit einer Geraden nicht zwei Lote fällen; was Euclid schon durch das Weglassen des Artikels in 12 kenntlich gemacht hat. Es läfst sich schon in 12 zeigen, dafs, wenn sich von Γ auf AB zwei Katheten fällen lassen, jede Gerade, welche Γ mit einem Punkt auf AB verbindet, auf AB senkrecht steht, und mittelst 4, dafs das zweite Lot zu einem Widerspruch gegen Axiom 1 führt.

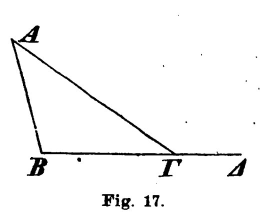


Fig. 17.

18.

In jedem Dreieck liegt der gröfseren Seite der gröfsere Winkel gegenüber.

Sei $AB\Gamma$ das Dreieck, und $A\Gamma > AB$.

Da $A\Gamma > AB$, mache man (Fig. 18) $A\Delta = AB$ (2) und ziehe $B\Delta$, dann ist $AB\Delta = A\Delta B$ (5) und $A\Delta B$ (16) $> A\Gamma B$, also auch $AB\Delta > A\Gamma B$ und um so mehr $AB\Gamma > A\Gamma B$.

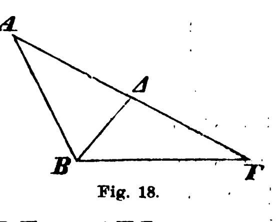


Fig. 18.

19.

In jedem Dreieck liegt dem gröſseren Winkel die gröſsere Seite gegenüber.

Beweis indirekt (Fig. 19).

20.

In jedem Dreieck sind irgend zwei Seiten zusammen gröſser als die dritte.

Sei $AB\Gamma$ das Dreieck (Fig. 20). Man verlängere BA bis Δ, so daſs $A\Delta = A\Gamma$, und ziehe $\Gamma\Delta$, dann ist $\sphericalangle A\Delta\Gamma = A\Gamma\Delta$, also $B\Gamma\Delta > A\Delta\Gamma$, also $\Delta B > B\Gamma$, also $BA + A\Gamma > B\Gamma$. Entsprechend wird gezeigt, daſs $BA + B\Gamma > A\Gamma$; $B\Gamma + \Gamma A > BA$ .... w. z. b. w.

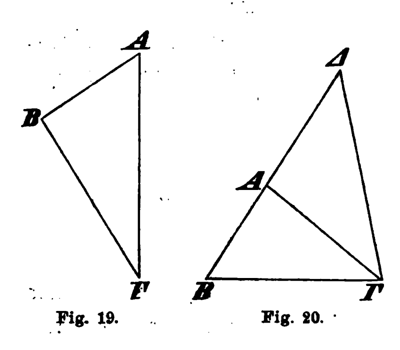


Fig. 19. Fig. 20.

Durch diesen Satz (und seine Folge 21) wird also bewiesen, daſs die Strecke die kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte ist.

Ich füge das Scholion des Proclus, soweit es interessant ist, wörtlich hinzu: „Diesen Satz sind die Epikuräer zu schmähen gewohnt, und sie sagen, er sei jedem Esel offenkundig und bedürfe keines Apparats. Und es sei ebenso unverständig von Selbverständlichem Beweis zu fordern als Unklares für selbstverständlich zu erachten (Ramus!). Diese unklaren Köpfe wissen offenbar nicht, was bewiesen werden muſs und was nicht zu beweisen ist. Daſs aber der Esel das vorliegende Theorem erkannt habe, schlieſsen sie daraus, daſs, wenn man ihm sein Heu an das Ende einer Seite legt, er auf dieser einen Seite marschiere und nicht auf den beiden andern, um sein Futter zu holen. Dazu ist zu bemerken, daſs der Satz als Erfahrungsthatsache klar ist, aber keineswegs dem logischen Grunde nach."

Es folgen dann die Beweise des Heron und Porphyrios, von denen ich den des Heron beifüge.

Wenn man den $\sphericalangle \alpha$ — diese Abkürzung auch schon bei Proclus — halbiert durch $\alpha\varepsilon$, so ist nach 16 und 19 $\alpha\beta > \beta\varepsilon$ und $\alpha\gamma > \varepsilon\gamma$, also $\alpha\beta + \alpha\gamma > \beta\gamma$. Vgl. zu diesem Satz Hilbert's Vortrag zu Paris „Mathematische Probleme". Gött. Nachr. 1900, Heft 3.

21.

Verbindet man einen Punkt im Innern eines Dreiecks mit den Enden einer Seite, so ist die Summe der Verbindungslinien kleiner als die Summe der beiden andern Seiten, aber sie schliefsen einen gröfseren Winkel ein.

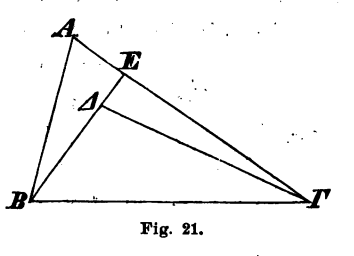


Fig. 21.

Sei $AB\Gamma$ das Dreieck, Δ der Punkt im Innern. $B\Delta$ werde ausgezogen bis E (Fig. 21), dann ist $AB + AE > BE$, also $AB + AE + E\Gamma > BE + E\Gamma$. Ebenso ist $\Gamma E + E\Delta > \Delta\Gamma$, also $BE + E\Gamma > \Delta\Gamma + B\Delta$, also erst recht $AB + A\Gamma > B\Delta + \Delta\Gamma$. Ferner Winkel $B\Delta\Gamma > \Delta E\Gamma > BA\Gamma$.... W. z. b. w.

Proclus zeigt an dem Beispiel des rechtwinkligen Dreiecks, dafs eine gebrochene Strecke im Innern sehr wohl gröfser sein kann als die Summe zweier Seiten.

22.

[Auf. 8.] Aus drei, drei gegebenen gleichen, Strecken ein Dreieck zu errichten; es müssen aber je zwei gröfser als die dritte sein.

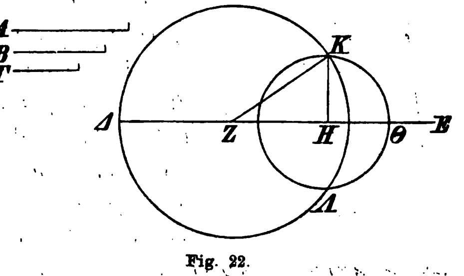


Fig. 22.

Es seien A, B, Γ die drei gegebenen Strecken, von denen immer je zwei gröfser als die dritte sind.

Es werde der Strahl ΔE (Fig. 22) hingelegt und $\Delta Z = A$ gemacht und $ZH = B$ und $H\Theta = \Gamma$ und mit Radius $Z\Delta$ im Z der Kreis $\Delta K\Lambda$ beschrieben: sodann im H mit $H\Theta$ der Kreis $K\Lambda\Theta$ und K mit Z und H verbunden, so ist KZH das verlangte Dreieck.

Beim Beweis fehlt der Nachweis, dafs die Kreise sich schneiden, den Proclus liefert, er folgt daraus, dafs wegen der Bedingung Θ stets aufserhalb des Kreises Z liegen mufs, während, da $A \geqq B$, H im Innern, bezw. auf dem Kreis Z liegt.

23.

[Auf. 9.] **An eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkt einen Winkel von gegebener Gröfse anzutragen.**

Sei die Gerade AB und A der Punkt auf ihr und $\varDelta\Gamma E$ der gegebene Winkel. Man nehme auf $\Gamma\varDelta$, ΓE beliebig die Punkte $\varDelta$ und E (Fig. 23), ziehe $\varDelta E$, und konstruiere aus drei Strecken, welche gleich $\Gamma\varDelta$, $\varDelta E$, ΓE sind, das Dreieck AZH, so dafs $\Gamma\varDelta = AZ$; $\Gamma E = AH$, $\varDelta E = ZH$, so ist $\sphericalangle\, \varDelta\Gamma E = ZAH$.

Beweis: 8. Also etc. . . . . w. geth. w. m.

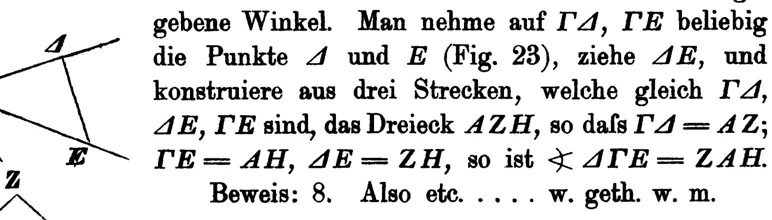


Fig. 23.

Die heute in den meisten Lehrbüchern übliche Variante, das Dreieck $\varDelta\Gamma E$ gleichschenklig zu machen, rührt von Apollonius her, die Konstruktion bei Euclid ist entschieden vorzuziehen: sie soll wie die Aufgabe 7 (S. 12) von Oinopides herrühren.

24.

Wenn zwei Dreiecke zwei gleiche Seitenpaare haben, die von ihnen eingeschlossenen Winkel aber ungleich sind, so liegt dem gröfseren Winkel die gröfsere Seite gegenüber.

Die Dreiecke seien $AB\Gamma$ und $\varDelta EZ$ und $BA = E\varDelta$, $\Gamma A = Z\varDelta$ und der Winkel bei A (Fig. 24) $>$ als der bei $\varDelta$; ich behaupte, dafs auch $B\Gamma > EZ$. Man konstruiert (nach 23) $\varDelta EH$, so dafs $\sphericalangle\, H\varDelta E = BA\Gamma$ und $H\varDelta = A\Gamma$, dann ist nach 4 $B\Gamma = EH$, und da $\varDelta Z = \varDelta H$, so ist $\sphericalangle\, \varDelta HZ = \varDelta ZH$, also $\sphericalangle\, \varDelta ZH > EHZ$ und um so mehr $EZH > EHZ$, also $HE > ZE$, also $B\Gamma > EZ$. . . . . q. e. d.

Fig. 24.

Bei Euclid fehlen die Lagen: Z auf HE; Z innerhalb $H\varDelta E$, in beiden Fällen ist der Satz unmittelbar ersichtlich (im 2. Falle nach 21).

25.

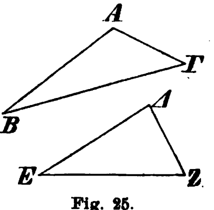


Fig. 25.

[Umkehrung.] Wenn zwei Dreiecke zwei Seitenpaare gleich haben, die dritten Seiten aber ungleich sind, so liegt der gröſseren Seite der gröſsere Winkel gegenüber.

(Fig. 25.) Beweis indirekt.

Proclus giebt zwei hübsche direkte Beweise, den einen von Menelaos, den die Figur 25a zeigt, den andern von Heron „dem Mechanikus", den die Figur 25b zeigt.

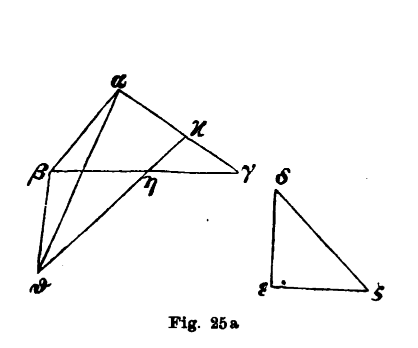


Fig. 25a

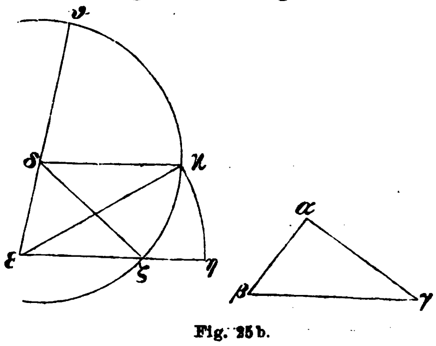


Fig. 25b.

26.

[Der 2. Kongruenzsatz.] Wenn zwei Dreiecke in zwei Winkeln übereinstimmen und in einer Seite, welche entweder an beiden gleichen Winkeln liegt oder einem von beiden gegenüberliegt, so sind die andern Seiten einander gleich und die dritten Winkel.

(Fig. 26.) Die Dreiecke seien $AB\Gamma$ und ΔEZ und $\sphericalangle AB\Gamma = \Delta EZ$ und $\sphericalangle B\Gamma A = EZ\Delta$ und sei zuerst $B\Gamma = EZ$; ich behaupte etc.

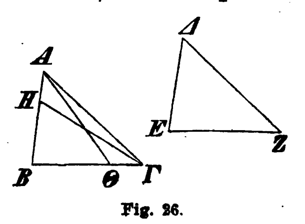


Fig. 26.

Denn wenn AB nicht gleich ΔE ist, so ist eine von beiden, z. B. AB die gröſsere und es werde $BH = E\Delta$ gemacht und $H\Gamma$ gezogen, dann ist (4) $H\Gamma = \Delta Z$ und $H\Gamma B = \Delta ZE = A\Gamma B$, was unmöglich, also sind AB und ΔE gleich und es gilt (4).

Wenn vorausgesetzt wird, daſs die gleichen Seiten AB und ΔE sind, so ist $B\Gamma = EZ$, denn wären sie ungleich und z. B. $B\Gamma$ die gröſsere, so mache man $B\Theta = EZ$ und ziehe $A\Theta$; dann wäre nach (4) $B\Theta A = EZ\Delta = A\Gamma B$, was, da $B\Theta A$ der Auſsenwinkel ist, unmöglich; also ist $B\Gamma = EZ$ (und die Dreiecke kongruent nach 4).

Seit wann dieser Satz als **zweiter** Kongruenzsatz gezählt wird, habe ich noch nicht ermitteln können; höchst auffallend ist, dafs ein Mann wie Zeuthen (Geschichte der Mathematik, Kopenh. 1896) **nicht bemerkt hat**, dafs Euclid die beiden Fälle des 2. Kongruenzsatzes in einem Satz behandelt hat. Danach verliert auch sein Urteil (S. 113), „von einer Vermengung, die nur wenig übersichtlich ist“, das Gewicht; ich bin der entgegengesetzten Ansicht. Es giebt kaum etwas durchsichtigeres als den planvollen Aufbau des 1. Buches.

27.

Werden zwei Geraden von einer dritten unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten, so sind die geschnittenen Linien parallel.

AB und $\Gamma\Delta$ werden von EZ (Fig. 27) so geschnitten, dafs die Wechselwinkel AEZ und $EZ\Delta$ einander gleich sind, so behaupte ich, dafs die AB der $\Gamma\Delta$ parallel ist.

Denn wenn nicht, so werden AB, $\Gamma\Delta$ ausgezogen entweder auf der Seite B, Δ oder A, Γ zusammentreffen. Sie sollen verlängert werden und auf der Seite B, Δ in H zusammentreffen; also ist der Aufsenwinkel des Dreiecks EZH, der Winkel AEZ, dem inneren, ihm gegenüberliegenden Winkel EZH gleich, was unmöglich. Also schneiden sich AB und $\Gamma\Delta$, verlängert, auf der Seite $B\Delta$ **nicht**. Ebenso wird gezeigt werden, dafs sie sich auch nicht auf der Seite $A\Gamma$ schneiden. Aber auf keiner von beiden Seiten sich schneidende sind parallel. Parallel folglich ist die AB der $\Gamma\Delta$.

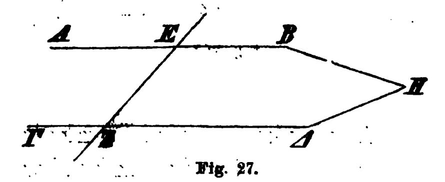


Fig. 27.

Wenn also etc. . . . ., q. e. d.

28.

Wenn zwei Geraden von einer dritten so geschnitten werden, dafs ein äufserer Winkel dem inneren entgegengesetzt und an derselben Seite liegenden Winkel gleich ist oder die inneren und an derselben Seite liegenden gleich zwei Rechten sind, so sind die geschnittenen Geraden einander parallel.

(Fig. 28.) $EHB = H\Theta\Delta$ (im heutigen Sprachgebrauch: Gegen- oder korrespondierende oder entsprechende Winkel) oder auch $BH\Theta$ und $H\Theta\Delta$ zusammen 2 Rechte (Ergänzungswinkel).

Denn da $\sphericalangle EHB = H\Theta\Delta$ und $\sphericalangle EHB = AH\Theta$ (15), so ist auch $AH\Theta = H\Theta\Delta$ und das sind Wechselwinkel, also AB (nach 27) parallel $\Gamma\Delta$.

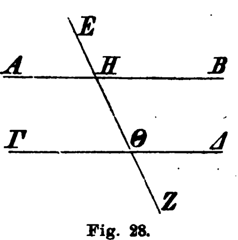


Fig. 28.

Im anderen Falle ist $BH\Theta + H\Theta\Delta$ gleich 2 Rechte und $AH\Theta + BH\Theta$ gleich 2 Rechte (13), also $AH\Theta = H\Theta\Delta$ etc.

Diese 28 Sätze sind vom Parallelenaxiom unabhängig, dagegen wird gelegentlich von dem Axiom, zwischen zwei Punkten ist nur eine Gerade möglich (Ax. 1), Gebrauch gemacht, sie gelten also ohne weiteres auch für die Lobatschefski'sche und Klein-Clifford'sche Planimetrie. (Nur mufs statt „Parallel" gesagt werden „Nicht sich schneidend".)

Aus dem Scholion des Proclus erfahren wir, dafs der heute in den meisten Lehrbüchern übliche Beweis (die Geraden müfsten sich der Symmetrie wegen, wenn sie sich auf der rechten Seite der schneidenden schnitten, auch auf der linken schneiden) von dem grofsen Astronomen Ptolomäos herrührt, der ein Buch zum Beweis des Parallelenaxioms geschrieben.

29.

Eine zwei parallele Geraden schneidende schneidet sie so, dafs die Wechselwinkel einander gleich sind, die Gegenwinkel gleich sind und die Ergänzungswinkel zusammen zwei Rechte betragen.

(Fig. 29.) Wäre $\sphericalangle AH\Theta \neq H\Theta\Delta$, so müfste einer von beiden gröfser als der andere sein, z. B. $AH\Theta$. Dann wäre $\sphericalangle BH\Theta + H\Theta\Delta < 2$ Rechte: (Gerade) aber, welche von Winkeln aus, die kleiner als zwei Rechten sind, ins Unbegrenzte verlängert werden, schneiden sich. (5. Forderung.) Daher müfsten sich AB und $\Gamma\Delta$ schneiden; aber sie schneiden sich nicht, da sie parallel sind; also ist $\sphericalangle AH\Theta$ dem Winkel $H\Theta\Delta$ nicht ungleich, also gleich.

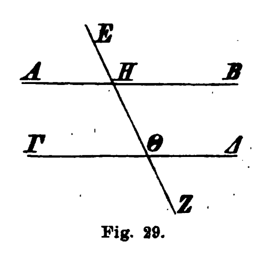


Fig. 29.

Aber $\sphericalangle AH\Theta = EHB$ (15), also auch $\sphericalangle EHB = H\Theta\Delta$. Zu beiden Seiten werde $BH\Theta$ zugefügt, also $\sphericalangle EHB + BH\Theta = H\Theta\Delta + BH\Theta = 2$ Rechte.

Also etc. . . . . q. e. d.

Über das Scholion und den Beweis des Ptolomäos, den Proclus richtig kritisiert, haben wir schon bei der 5. Forderung gesprochen, Proclus (Geminus? Heron?) ersetzt sie durch die Forderung: Eine Gerade, welche eine von zwei Nichtsichschneidenden schneidet, schneidet auch die andere. Sein Beweis ist fehlerhaft, da er annimmt, dafs jede Querstrecke zwischen zwei Nichtsichschneidenden endlich sein müsse.

30.

Geraden, welche derselben Geraden parallel sind, sind untereinander parallel.

(Fig. 30). Sei jede von beiden (nämlich AB, $\Gamma\Delta$) parallel EZ; es möge sie [d. h. AB und $\Gamma\Delta$] HK schneiden, dann ist $\sphericalangle AHK = H\Theta Z$ (29) und aus gleichem Grunde $H\Theta Z = HK\Delta$, also $AHK = HK\Delta$, also (nach 27) AB parallel $\Gamma\Delta$.

Fig. 30.

An dem Scholion des Proclus ist nur der Ausdruck interessant, dafs Euclid dies noch hinzusetzte: „wegen der Grünheit der Hörer"; also zum Vorlesungsgebrauch für Studierende war auch (oder schon) damals der Euclid bestimmt. Der Beweis selbst ist fehlerhaft, er ist richtig, wenn AB und $\Gamma\Delta$ als parallel EZ vorausgesetzt werden, aber nicht, wenn z. B. AB und EZ als parallel $\Gamma\Delta$ vorausgesetzt werden, denn dann nimmt er gerade den Satz an, den er beweisen will, nämlich, dafs eine Gerade, welche eine von zwei Nichtsichschneidenden schneidet, auch die andere schneidet. Übrigens ist schon beim Beweis des angenommenen Falles stillschweigend vorausgesetzt, dafs jede Gerade die Ebene in zwei getrennte Teile teile. Für den zweiten Fall mufs der Beweis indirekt geführt werden; es wäre $BH\Theta + H\Theta Z$ sowohl ungleich als gleich 2 Rechten.

Satz 30 ist das Par.-Ax., wie es in den meisten heutigen Schulbüchern steht: „Durch einen Punkt läfst sich zu einer Gerade nur eine Parallele ziehen."

31.

Durch einen gegebenen Punkt die einer gegebenen Geraden parallele Gerade zu ziehen.

(Fig. 31.). Gegeben Punkt A und die Gerade $B\Gamma$. Es werde auf $B\Gamma$ der beliebige Punkt Δ genommen und $A\Delta$ gezogen und an den Strahl $A\Delta$ und den Punkt ein dem Winkel $A\Delta\Gamma$ gleicher (nach der entgegengesetzten Seite) angetragen (23) und EA auf der Geraden (ἐπ' εὐθείας) AZ hinzugefügt (dann ist nach 17) EAZ die verlangte Parallele).

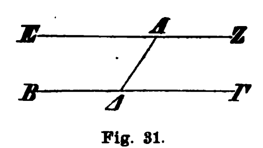


Fig. 31.

Das Scholion des Proclus ist von gröfster Wichtigkeit, weil es in gröfster Schärfe sich darüber ausspricht, dafs der Stoicheiotes den Singular ohne Artikel und Zahlwort gebraucht, um die vollständige Eindeutigkeit sowohl bei dieser Aufgabe als bei der: Von einem Punkt aufserhalb auf eine gegebene Gerade das Lot zu fällen, hervorzuheben.

32.

In jedem Dreieck ist, wenn eine beliebige Seite verlängert wird, der Aufsenwinkel den inneren ihm gegenüberliegenden Winkeln gleich und die drei Winkel innerhalb des Dreiecks sind zwei Rechten gleich.

(Fig. 32.) Sei $AB\Gamma$ das Dreieck, und es werde eine Seite, z. B. $B\Gamma$ verlängert nach Δ. Man ziehe ΓE parallel AB, dann sind $BA\Gamma$ und $A\Gamma E$ als Wechselwinkel gleich (29) und $AB\Gamma$ und $E\Gamma\Delta$ als Gegenwinkel, also $A\Gamma\Delta = BA\Gamma + AB\Gamma$.

Ferner $A\Gamma\Delta + A\Gamma B = BA\Gamma + AB\Gamma + A\Gamma B$ $= 2$ Rechte.

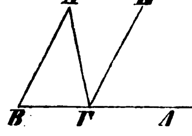


Fig. 32.

Aus dem Scholion erfahren wir, dafs Eudemos von Rhodos, „der Peripatetiker“, einer von den unmittelbaren Schülern des Aristoteles, diesen Satz den Pythagoräern zuschreibt mit samt dem Beweise, der gewöhnlich in den Lehrbüchern steht, der Parallelen durch die Spitze zur Grundlinie. Der Satz selbst ist als Erfahrungssatz gewifs viel älter als Euclid, und es wird vollkommen klar, dafs der ganze Gang der Elemente bis zu ihm hin

durch das Bestreben ihn zu beweisen bestimmt ist. Der enge Zusammenhang des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck mit der Parallelentheorie ist also schon dem Euclid völlig bewufst gewesen.

33.

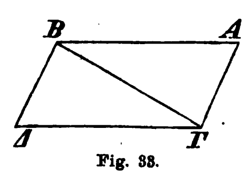


Fig. 33.

Strecken, welche parallele und gleiche Strecken an gleichen Seiten [gleichliegend] verbinden, sind gleich und parallel.

(Fig. 33.) AB gleich und parallel $\Gamma\Delta$; Behauptung $\Delta\Gamma$ gleich und parallel $B\Delta$.

Beweis: Ziehe $B\Gamma$, dann ist $AB\Gamma = B\Gamma\Delta$ (Wechselwinkel 29), also $AB\Gamma \cong \Delta\Gamma B$ (4), also $AB = \Delta\Gamma$ und parallel (27).

Proclus bemerkt, dafs mit diesem Satz die Existenz der Parallelogramme gesichert ist; es folgt nun (nach Proclus) der dritte Teil des ersten Buches, die Lehre von den Parallelogrammen und daran anschliefsend die Flächenvergleichung. Euclid spricht zunächst von einem parallelogrammischen Raumgebilde und versteht darunter ein Viereck, dessen Gegenseiten parallel sind; das Wort ist zufolge Proclus nach Analogie von ευθυγραμμος geradlinig gebildet. Zu bemerken ist, dafs das Wort Diagonale weder bei Euclid noch bei Proclus vorkommt, sondern statt dessen Diameter, Diagonale erst bei Heron.

34.

In Parallelogrammen sind die gegenüberliegenden Seiten und Winkel gleich und jeder Durchmesser halbiert sie.

(Fig. 34.) $A\Gamma\Delta B$ das Parallelogramm, ΓB der Durchmesser. Beweis durch Kongruenz von $AB\Gamma$ und $B\Gamma\Delta$ nach dem (fälschlich zweiten) Kongruenzsatz (26).

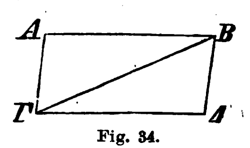


Fig. 34.

Proclus hebt ausdrücklich hervor, dafs die Halbierung sich auf den Raum, den das Viereck einnimmt, bezieht, und nicht auf den Winkel, welchen die Diagonale durchschneidet.

35.

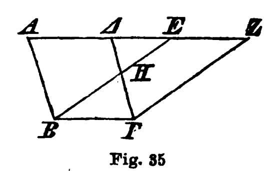


Fig. 35

Parallelogramme auf derselben Basis und in denselben Parallelen sind einander [flächen]gleich.

(Fig. 35.) Beweis: $A\Delta = B\Gamma$, $EZ = B\Gamma$, also $A\Delta = EZ$ und ΔE ist gemeinsam, also

$AE = \Delta Z$; aber auch $AB = \Delta\Gamma$ und $\sphericalangle EAB = Z\Delta\Gamma$, also $\triangle ABE \cong \Delta\Gamma Z$ (4). Wird das gemeinsame Dreieck ΔHE weggenommen, so ist Trapez $ABH\Delta = EH\Gamma Z$, wird das gemeinsame Dreieck $HB\Gamma$ zugesetzt, so folgt: das ganze Parallelogramm $AB\Gamma\Delta = EB\Gamma Z$.

36.

Parallelogramme auf gleicher Basis in denselben Parallelen sind einander gleich.

(Fig. 36.) $AB\Gamma\Delta$ und $EZH\Theta$ die Parallelogramme, $B\Gamma$ und ZH gleich.

Fig. 36.

Beweis: Man ziehe BE, $\Gamma\Theta$, dann



ist $EB\Gamma\Theta$ nach 33 ein Parallelogramm und $AB\Gamma\Delta = EB\Gamma\Theta = EZH\Theta$.



37.

Dreiecke auf derselben Grundlinie in denselben Parallelen sind [flächen]-gleich.

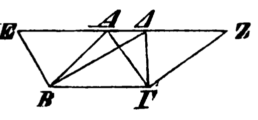


Fig. 37.

(Fig. 37.) $AB\Gamma$ ist die Hälfte von $BEA\Gamma$, und $B\Delta\Gamma$ die Hälfte von $\Delta B\Gamma Z$, welche Parallelogramme nach 35 gleich sind; also ist $AB\Gamma = B\Delta\Gamma$.

38.

Dreiecke auf gleicher Grundlinie in denselben Parallelen sind unter sich gleich (Fig. 38).

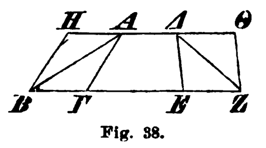


Fig. 38.

39.

Gleiche Dreiecke auf derselben Basis und an derselben Seite dieser Basis gelegen, sind in denselben Parallelen.

(Fig. 39.) $AB\Gamma$ und $\Delta B\Gamma$ seien die Dreiecke.

Fig. 39.

Wenn $A\Delta$ nicht parallel $B\Gamma$, so ziehe man (31) durch A die Parallele AE zu $B\Gamma$ und ziehe $E\Gamma$, dann ist $AB\Gamma = EB\Gamma = \Delta E\Gamma$; das größere dem kleineren, was unmöglich. Ähnlich wird gezeigt, daſs auch keine andere Linie auſser $A\Delta$ mit $B\Gamma$ parallel ist.

40.

Gleiche Dreiecke auf gleichen Grundlinien [in derselben Geraden] und an derselben Seite [dieser Geraden] sind in denselben Parallelen.

(Fig. 40.) Beweis wie 39.

Es fällt auf, dafs der Zusatz [in derselben Geraden] bei Euclid fehlt, und das Fehlen dieser Bestimmung von Proclus nicht gerügt wird. Proclus beweist dann den Satz, dafs, wenn flächengleiche Dreiecke (bezw. Parallelogramme) in denselben Parallellinien liegen, sie gleiche Grundlinien haben, und fügt über diesen Satz sowie die analogen hinzu: „Da aber die Methode des Beweises und das Unmögliche (der Teil dem Ganzen gleich) dieselben sind, hat sie der Stoicheiotes mit Fug ausgelassen.“

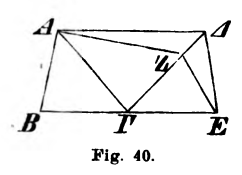


Fig. 40.

41.

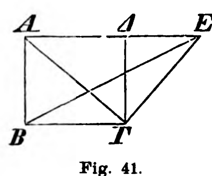


Fig. 41.

Wenn ein Parallelogramm und ein Dreieck dieselbe Basis haben und in denselben Parallelen liegen, so ist das Parallelogramm das Doppelte des Dreiecks.

(Fig. 41.) Das Parallelogramm $AB\Gamma\Delta$ hat dieselbe Basis wie das Dreieck $EB\Gamma$ und liegt in denselben Parallelen $B\Gamma$, AE. Man ziehe $A\Gamma$, dann ist $AB\Gamma = EB\Gamma$ (37), $AB\Gamma\Delta = 2\ AB\Gamma$ (34), also $AB\Gamma\Delta = 2\ EB\Gamma$.

42.

Ein dem gegebenen Dreieck ($AB\Gamma$) gleiches Parallelogramm zu konstruieren in einem Winkel, welcher einem gegebenen Winkel gleich ist.

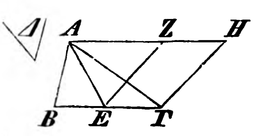


Fig. 42.

(Fig. 42.) Halbiere $B\Gamma$ in E (10), ziehe AE, lege an $E\Gamma$ in E einen dem gegebenen Winkel Δ gleichen an, $\measuredangle\ \Gamma EZ$ (23) und ziehe durch A die Parallele AH zu $E\Gamma$ und durch Γ die Parallele ΓH zu EZ, so ist $ZE\Gamma H$ das verlangte Parallelogramm.

43.

In jedem Parallelogramm sind die Ergänzungen der Parallelogramme wie den Durchmesser (die Diagonale) einander gleich.

Das Parallelogramm (Fig. 43) sei $AB\Gamma\Delta$, die Diagonale $A\Gamma$, die Parallelogramme um $A\Gamma$ seien $E\Theta$ und ZH, die „Ergänzungen" genannten [Parallelogramme] BK und $K\Delta$, ich behaupte, es sei $BK = K\Delta$.

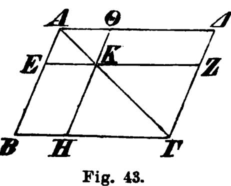


Fig. 43.

Denn da $AB\Gamma\Delta$ ein Parallelogramm ist, und $A\Gamma$ seine Diagonale, wird $\triangle AB\Gamma = A\Gamma\Delta$ sein (34), und da $E\Theta$ ein Parallelogramm ist und AK seine Diagonale, wird $\triangle AEK = A\Theta K$ sein, und gleicherweise wird $\triangle KH\Gamma \equiv KZ\Gamma$ sein, also $AEK + KH\Gamma = A\Theta K + KZ\Gamma$ (Ax. 2). Es ist aber das ganze $\triangle AB\Gamma$ gleich dem ganzen $\triangle A\Delta\Gamma$ gleich, der Rest also, das Parallelogramm BK, dem Rest, dem Parallelogramm $K\Delta$, gleich.

Also etc. . . . . q. e. d.

Dafs mit diesem ebenso einfachen als wichtigen Satz die ganze Lehre von der Flächenverwandlung, und ebenso die Konstruktion der 4. Proportionale, also die ganze Ähnlichkeitslehre, dem Euclid zugänglich geworden, hebt Zeuthen mit Recht hervor. Man kann, wie oft gethan, unmittelbar auf diesen Satz den Pythagoras gründen. Pappos z. B. hat zahlreiche Anwendungen von dem „Satz über die Ergänzungsparallelogramme" gemacht.

44.

An einer gegebenen Strecke ein Parallelogramm anzulegen, welches einem gegebenen Dreieck gleich ist und einen Winkel von gegebener Gröfse hat.

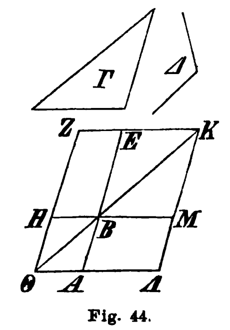


Fig. 44.

(Fig. 44.) AB die gegebene Strecke, Γ das gegebene Dreieck, Δ der gegebene Winkel. Es werde (nach 42) das Parallelogramm $BEZH$ konstruiert, dem Dreieck Γ gleich und mit dem Winkel EBH gleich Δ, und dies Parallelogramm so gelegt, dafs BE, AB in einer geraden Linie sind und ZH ausgezogen bis Θ, und durch A zu BH,

EZ die Parallele $A\Theta$ gezogen und Θ mit B verbunden. Weil die Parallelen ΘA und EZ von ΘZ geschnitten werden, ist $\sphericalangle\ A\Theta Z + \Theta ZE = 2$ Rechten, also $\sphericalangle\ B\Theta H + HZE < 2$ Rechten, also schneiden sich (nach 5. Forderung) ΘB und ZE, und zwar in K. Durch K werde die zu EA, $Z\Theta$ Parallele $K\Lambda$ gezogen und ΘA, HB verlängert bis zu Λ und M, so ist $ABM\Lambda$ das verlangte Parallelogramm.

45.

Ein Parallelogramm zu konstruieren, welches einer gegebenen geradlinigen (Figur) gleich ist, und einen Winkel von gegebener Gröfse hat.

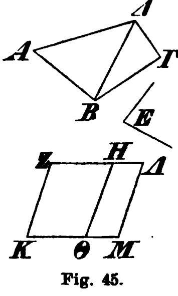


Fig. 45.

(Fig. 45.) Sei $AB\Gamma\Delta$ die gegebene geradlinige Figur, E der gegebene Winkel. Man ziehe ΔB und konstruiere (42) das dem Dreieck $AB\Delta$ gleiche Parallelogramm $Z\Theta$ mit dem Winkel ΘKZ gleich E und lege an $H\Theta$ (nach 44) das dem Dreieck $\Delta\Gamma B$ gleiche Parallelogramm HM mit dem Winkel $H\Theta M = E$, so ist $ZKM\Lambda$ das verlangte Parallelogramm.

Euclid beschränkt sich auf ein Viereck, aber da jedes Vieleck von einer Ecke aus in Dreiecke zerlegt werden kann, so ist die Aufgabe allgemein gelöst.

46.

Von einer gegebenen Strecke aus ein Quadrat zu zeichnen (ἀναγράψαι, wörtlich beschreiben).

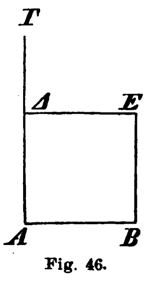


Fig. 46.

(Fig. 46.) Gegeben AB, man errichte in A das Lot $A\Gamma$ auf AB (11) und mache $A\Delta = AB$ (2), und ziehe durch Δ zu AB die Parallele ΔE und durch B und $A\Delta$ die Parallele BE (31), so ist $A\Delta EB$ ein Parallelogramm. Also $AB = \Delta E$; $A\Delta = BE$, aber $AB = A\Delta$, also $BA = A\Delta = \Delta E = EB$, also ist das Parallelogramm gleichseitig. Ich behaupte aber, dafs es auch rechtwinklige etc. Daher ist $AB\Gamma\Delta$ ein Quadrat; . . . . w. zu machen war.

47.

In den rechtwinkligen Dreiecken ist das Quadrat der den rechten Winkel unterspannenden (ὑποτεινούσης) Seiten gleich

den Quadraten der den rechten Winkel einschliefsenden Seiten.

Sei (Fig. 47) $AB\Gamma$ das rechtwinklige Dreieck, mit dem rechten Winkel $BA\Gamma$. Ich behaupte, dafs das Quadrat von $B\Gamma$ gleich ist den Quadraten von BA, $A\Gamma$.

Man zeichne das Quadrat $B\Delta E\Gamma$ von $B\Gamma$ und von BA, $A\Gamma$ die HB, $\Theta\Gamma$ und durch A werde zu jeder von den beiden $B\Delta$, ΓE die Parallele $A\Lambda$ gezogen und A mit Δ, Z mit Γ verbunden. Und da ein Rechter jeder von den beiden Winkeln $BA\Gamma$, BAH ist, [so] bilden die von einer Geraden, BA, und an einem Punkt auf ihr, A, an verschiedenen Seiten gelegenen Strahlen $A\Gamma$, AH Nebenwinkel, welche [zusammen] zwei Rechte ausmachen, folglich sind ΓA, AH in einer Geraden (14). Aus denselben [Gründen] ist BA mit $A\Theta$ auf einer Geraden. Und da der Winkel $\Delta B\Gamma$ gleich ZBA ist, denn jeder ist ein Rechter, so lege man zu beiden $AB\Gamma$ hinzu, so ist der ganze Winkel $AB\Delta$ dem ganzen Winkel $ZB\Gamma$ gleich. Und da ΔB gleich $B\Gamma$, und ZB gleich AB, so sind die beiden ΔB, BA den beiden ZB, $B\Gamma$ gleich, eine jede jeder, und der Winkel ΔBA gleich $ZB\Gamma$, also ist die Basis $A\Delta$ der Basis $Z\Gamma$ gleich und das Dreieck $AB\Delta$ dem Dreieck $ZB\Gamma$. Aber vom Dreieck $AB\Delta$ ist das Doppelte das Parallelogramm $B\Lambda$, denn sie haben dieselbe Basis, nämlich $B\Delta$ und sind in denselben Parallelen $B\Delta$ und $A\Lambda$. Also ist das Parallelogramm $B\Lambda$ dem Quadrat HB gleich.

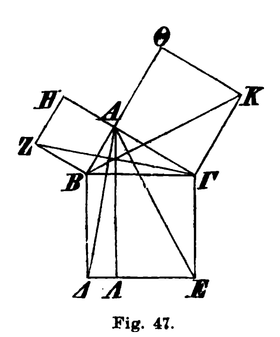


Fig. 47.

Entsprechend wird, wenn A mit E und B mit K verbunden werden, gezeigt werden, dafs auch das Parallelogramm $\Gamma\Lambda$ gleich ist dem Quadrat $\Theta\Gamma$.

Also ist das ganze Quadrat $B\Delta E\Gamma$ den beiden Quadraten HB, $\Theta\Gamma$ gleich. Und es ist das Quadrat $B\Delta E\Gamma$ von $B\Gamma$ (aus) beschrieben, die beiden aber HB, $\Theta\Gamma$ von BA, $A\Gamma$. Also ist das Quadrat von der Seite $B\Gamma$ gleich den Quadraten von den Seiten BA, $A\Gamma$.

Also etc. . . . . q. e. d.

48.

Wenn in einem Dreieck das Quadrat einer Seite gleich ist den Quadraten der übrigen beiden Seiten der Dreiecks,

so ist der von den übrigen beiden Seiten umschlossene Winkel ein Rechter.

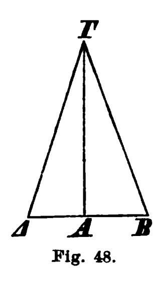


Fig. 48.

(Fig. 48.) Denn im Dreieck $AB\Gamma$ sei $B\Gamma^2 \cong BA^2 + A\Gamma^2$.

Man ziehe vom Punkt A zu ΓA die Senkrechte $A\Delta$, mache $A\Delta$ gleich BA und ziehe $\Delta\Gamma$. Da $\Delta A = AB$, so wird auch $\Delta A^2 = AB^2$ sein. Gemeinsam lege $A\Gamma^2$ hinzu, also $\Delta A^2 + A\Gamma^2 = BA^2 + A\Gamma^2$, aber $\Delta\Gamma^2 = \Delta A^2 + A\Gamma^2$, denn $\sphericalangle\, \Delta A\Gamma$ ist ein Rechter, und $B\Gamma^2 = BA^2 + A\Gamma^2$ durch Voraussetzung, also $B\Gamma^2 = \Delta\Gamma^2$, also auch $B\Gamma = \Delta\Gamma$, also Dreieck $A\Gamma B \cong A\Gamma\Delta$ (8), also $\sphericalangle\, \Gamma AB = \Gamma A\Delta$ gleich einem Rechten . . . . q. e. d.

Euclid schliefst das 1. Buch mit dem grofsen Satz und seiner Umkehr, ein Beweis, dafs ihm seine Bedeutung als des Satzes, auf dem die ganze Flächenrechnung (und die ganze Trigonometrie) beruht, klar ist. Dafs der Satz den Pythagoräern zugehört, ist nach den vielfachen Angaben der Alten unzweifelhaft (Vitruv, Plutarch, Digones Laertios, Proclus etc.), es ist aber im höchsten Grade wahrscheinlich, dafs „er selbst“ (αὐτὸς) der Entdecker gewesen.

Wenn aus den Chinesischen Rechenaufgaben aus dem Tscheou pei etc. hervorgeht, dafs den Chinesen der Satz bekannt war, so folgt daraus noch lange nicht, dafs sie den Satz selbständig gefunden haben. Die Chinesen sind keineswegs immer so fremdenfeindlich gewesen, wie sie sich heute, angesichts der Gefahr, dafs ihnen eine ganz neue Kultur aufgezwungen wird, erweisen. Dafs das Dreieck 3, 4, 5 ein rechtwinkliges sei, war gewifs eine den Babyloniern, Chinesen, Ägyptern äufserst früh bekannte Zimmermannsregel, aber den grofsen Satz darin erkannte der Hellene. Über den Beweis ist uns freilich nichts erhalten; im Menon läfst Platon durch Sokratische „Maieutik“ (Hebammenkunst) den Spezialfall beweisen, wenn das Dreieck gleichschenklig, und Cantor vermutet gewifs mit Recht, dafs die Pythagoräer sehr viele Unterfälle unterschieden haben und deswegen der Pythagoräer Beweis durch den Euclidischen spurlos verdrängt sei. Proclus berichtet von andern Beweisen des Heron und Pappos, in einer Monographie sind dann an 50 gesammelt.

Dafs gerade der Euclidische Beweis des Pythagoras aus der Anschauung hervorgegangen, habe ich wiederholt bei anderer Gelegenheit hervorgehoben, und besonders bemerkt, dafs die Linien, die nach

Schopenhauer (Welt als W. und V. S. 15) gezogen werden „ohne dafs man weifs, warum“ etc., die Linien $A\Delta$, $Z\Gamma$ etc., gerade den anschaulichen Kern enthalten. Die Auffindung des Satzes geht von der Anschauung aus, dafs das Dreieck $ZB\Gamma$ seine Fläche nicht ändert, wenn es eine Vierteldrehung um die Ecke B macht und in die Lage $AB\Delta$ kommt, und beide Dreiecke ändern, wie nach Satz 37 feststeht, ihren Inhalt nicht, wenn die Spitzen sich auf den Parallelen $A\Gamma$ und ΔA bewegen.

Für die Unechtheit aller „Porismata“ scheint mir die Thatsache zu sprechen, dafs der Satz $AZ = BA$ nicht als Zusatz ausgesprochen ist. Die Aufgabe, ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln, fehlt hier und sie wird erst II, 14 gelöst, und dann noch einmal indirekt dadurch, dafs VI, 17 die Identität zwischen $a:b = b:c$ und $ac = b^2$ ausspricht.

Man kann bemerken, dafs Euclid die Lehre von den Parallelogrammen fast ganz dem Hörer überläfst, fast alle Umkehrungen, die heute unsere Lehrbücher füllen, fehlen, dagegen wird die Flächenvergleichung, auf der die Flächenmessung beruht, ganz ausführlich behandelt. Es sind drei der Ausdehnung nach sehr ungleiche Teile, in die Buch I zerfällt: Satz 1—26 die wichtigsten Sätze über Winkel, Dreiecke mit den 3 Kongruenzsätzen und dem Satze über die Winkelsumme. Satz 27—33 die Parallelentheorie. Satz 34—48 die Flächenvergleichung.

II. [Buch.]

Nachdem das 1. Buch die Grundlagen der Geometrie einer, zwei und drei Geraden gegeben (bis Satz 26), dann die Lehre von den Parallelen und der Existenz der Parallelogramme, sodann die Flächenvergleichung durchgeführt hat, endigte es mit dem Pythagoras, der die Addition und Subtraktion zweier Quadrate bezw. die Konstruktionen von $\sqrt{a^2 + b^2}$ und $\sqrt{a^2 - b^2}$ giebt; das 2. Buch, das als geometrische Algebra längst erkannt ist, lehrt nun die Rechnung mit Aggregaten, speziell die Multiplikation, geht bis zur Auflösung der quadratischen Gleichungen in geometrischer Einkleidung, zunächst nur in speziellem Falle, und endigt mit dem geometrischen Existenzbeweis der Quadratwurzel.

Definitionen.

1) Man sagt: Zwei einen rechten Winkel einschliefsende Seiten eines Rechtecks enthalten es.

Die Konstruktion bei Euclid ist passiv, ὑπὸ mit dem Genetiv vertritt das Subjekt des Aktiv, es ist also die Übersetzung „unter“ von Lorenz und Mollweide und Peyrard zu verwerfen. Die Abkürzung ab für das Rechteck, welches diese Strecken enthalten, behalten wir bei, auch Heiberg hat sie.

2) Von der Fläche eines Parallelogramms soll die Summe eines jeden der beiden um den Durchmesser liegenden Parallelogramme mit den beiden Ergänzungen ein Gnomon heifsen.

Der Imperativ „καλείσθω“ beweist wieder, dafs dieser Name von Euclid neu eingeführt wird. Aus Proclus wissen wir, dafs der γνωμων (Erkenner, Beurteiler), der ursprünglich den schattengebenden Zeiger der Sonnenuhr bedeutet, bezw. den Stab, dessen Verhältnis zum Schatten die Höhe der Sonne über dem Horizont bestimmt, die alte Bezeichnung für die senkrechte Richtung überhaupt ist. Wird nun der rechte Winkel zum Werkzeug (Richtscheit), also massiv ausgeführt, so heifst das Instrument, das aus Quadrat AC durch Herausschneiden von Quadrat BC gewonnen wird, ebenfalls Gnomon, und Euclid erweitert nun den Begriff vom Quadrat auf ein beliebiges Parallelogramm, also aus der Fig. 43 sind Par. $A\Gamma - K\Gamma$ bezw. $A\Gamma - AK$ Gnomone, bezw. erhält man das zu $K\Gamma$ bezw. AK ähnliche und ähnlich liegende grofse Parallelogramm $A\Gamma$ durch Anlegung der Gnomone $HBE\,A\Theta\Delta\,ZKH$ bezw. $\Theta\Delta Z\,\Gamma HB\,EK\Theta$. Daher hat (Cantor S. 151) Heron den Begriff wieder erweitert: Alles, was, zu einer Zahl oder Figur hinzugefügt, das ganze dem ähnlich macht, zu welchem hinzugefügt worden war, heifst Gnomon.

[Satz] 1.

Wenn zwei Strecken (gegeben) sind, und die eine derselben in beliebig viele Teile geteilt wird, so ist das von beiden Strecken enthaltene Rechteck gleich den Rechtecken aus der nicht zerschnittenen Strecke und den einzelnen Teilen.

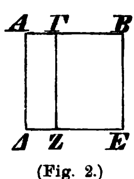
(Fig. 1.) Die [unzerschnittene] Strecke sei Δ, die zerschnittene $B\Gamma$.

(Fig. 1.)

Der Beweis der Formel $a(b+c+d) = ab + ac + ad$ wird unmittelbar aus der Anschauung entnommen.

2.

Wird eine Strecke beliebig geteilt, so ist die Summe der Rechtecke aus der ganzen Strecke und jedem der Teile gleich dem Quadrate der ganzen Strecke.



(Fig. 2.)

(Fig. 2.) Beweis der Formel, wenn $a = b + c$, so ist $a \cdot a = a(b+c) = ab + ac$, ebenfalls aus der Anschauung. Comman-

dinus 1572, Clavius 1607 fügen dieser Formel die allgemeine Multiplikationsregel $(x + y + z + \cdots)(a + b + c + \cdots) = xa + ya + za + \cdots$ hinzu. Der Satz ist schon beim Beweis des Pythagoras benutzt (Pfleiderer).

3.

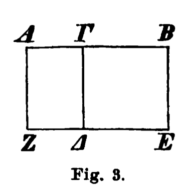


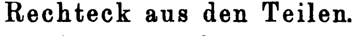
Fig. 3.

Wird eine Strecke beliebig geteilt, so ist das Rechteck aus der ganzen Strecke und einem der Teile gleich dem Rechteck aus den Teilen und dem Quadrat des vorher gewählten Teiles.

(Fig. 3.) Formel $(a + b)a = ab + a^2$, Beweis wie in 1 und 2.

4.

Wird eine Strecke beliebig geteilt, so ist das Quadrat der Ganzen gleich den Quadraten der Teile und dem doppelten Rechteck aus den Teilen.



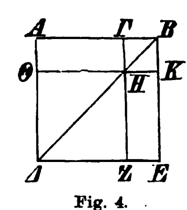


Fig. 4.

Denn die Strecke AB (Fig. 4) werde beliebig geteilt in Γ, ich behaupte:

$$AB^2 = H\Gamma^2 + \Gamma B^2 + 2A\Gamma \cdot \Gamma B.$$

Aus der Figur sieht man, dafs die wichtige Formel $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ als Spezialfall von Satz I, 43 erkannt ist. Dafs man aus ihr den Pythagoras unmittelbar ableiten kann, ist bekannt. Der zweite Beweis dieses Satzes bei Campanus beweist zuerst den Satz, dafs die Diagonale den Winkel des Quadrats halbiert, Heiberg meint, dafs er vielleicht der ältere sei.

(Porisma: Hieraus ist klar, dafs in den Quadraten die um die Diagonale liegenden Parallelogramme Quadrate sind.)

Das Porisma mutmafslich Zusatz des Theon.

5.

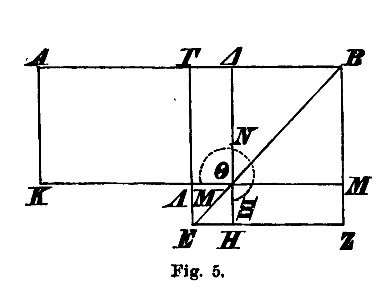


Fig. 5.

Wird eine Strecke in gleiche und ungleiche Teile zerschnitten, so ist das Rechteck aus den ungleichen Teilen samt dem Quadrat der Strecke zwischen den Teilpunkten gleich dem Quadrat der halben Strecke.

(Fig. 5.) Die Strecke AB wird bei Γ in gleiche und bei Δ in ungleiche Teile geteilt; ich behaupte:

$$A\Delta \cdot \Delta B + \Gamma\Delta^2 = \Gamma B^2.$$

Es werde in ΓB das Quadrat ΓEZB konstruiert (I, 46) und BE gezogen und durch Δ zu den [Geraden] ΓE, BZ die Parallele ΔH, durch Θ aber zu (den) AB und EZ die Parallele KM, ferner durch A zu $\Gamma\Delta$ und BM die Parallele AK. Und weil die Ergänzung $\Gamma\Theta = \Theta Z$ (I, 43), werde zu beiden das ΔM hinzugesetzt, sofort ist das ganze ΓM dem ganzen ΔZ gleich. Aber $\Gamma M = AA$, da ja $A\Gamma$ dem ΓB gleich ist; folglich ist auch AA gleich ΔZ. Lege zu beiden $\Gamma\Theta$ zu, sodann ist das ganze $A\Theta$ dem Gnomon $M^{(\prime)}N\Xi$ gleich. Aber das $A\Theta$ ist $A\Delta \cdot \Delta B$; denn $\Delta\Theta = \Delta B$; und also ist der Gnomon $M'N\Xi = A\Delta \cdot \Delta B$. Zu beiden lege AH zu, das dem Quadrat von $\Gamma\Delta$ gleich ist; folglich ist Gnomon $M'N\Xi + AH = A\Delta \cdot \Delta B + \Gamma\Delta^2$. Aber Gnomon $M'N\Xi + AH$ ist das ganze Quadrat ΓEZB, das ΓB^2 ist; also $A\Delta \cdot \Delta B + \Gamma\Delta^2 = \Gamma B^2$.

Also, wenn ... etc. q. e. d.

Die Formel, welche hier bewiesen, ist: $ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, es erscheint auffallend, dafs die Formeln $(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$ und $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ fehlen, deren geometrischer Beweis daher von Angelo de Marchettis (Euclid. reformatus 1709) zugefügt ist. Der Grund liegt wohl darin, dafs die erste Formel in der des Satzes 4 enthalten ist, sobald $a + b$ mit a bezeichnet wird, und die zweite in der eben bewiesenen. Die grofse Knappheit, der sich Euclid sachlich befleifsigt, läfst die Zusätze 2. und Beweise sämtlich als im höchsten Grade verdächtig erscheinen.

Bringt man $\Gamma\Delta^2$ auf die andere Seite, so ist damit zugleich der Potenzsatz III, 35 bewiesen.

Obwohl M zweimal in der Figur vorkommt, hat Heiberg aus Treue gegen die Handschriften den Buchstaben nicht geändert. Eigenartig ist die Bezeichnung des Gnomons dadurch, dafs die Flächenstücke, aus denen er besteht, durch den Kreisbogen bezeichnet werden.

Da das Rechteck $A\Delta\Theta K$ und das Quadrat ΓB^2 den gleichen Umfang haben: $2AB$, so ist mit 5 zugleich die älteste Maximumaufgabe gelöst, bewiesen, und unter allen Rechtecken von gleichem Umfang hat das Quadrat den gröfsten Inhalt (Pappos, Lemma XIII zu des Apollonius: de sectione rationis et spatii; Viviani (Florentiner

Problem!) 1659: De max. et min. geom. divin. vgl. Pfleiderer II, 15). „Da wegen seiner gröfseren Höhe das Rechteck gröfser ist als jedes andere Parallelogramm von gleichem Umfange auf derselben Grundlinie, so folgt, dafs unter allen Parallelogrammen von gleichem Umfange das Quadrat den gröfsten Inhalt hat.“ Viviani 1701 vgl. Pfleiderer l. c. Euclid selbst beweist den Maximums-Satz in allgemeiner Fassung erst VI, 27.



6.

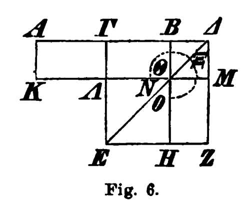


Fig. 6.

Wird eine Strecke AB in Γ halbiert und AB um irgend eine Strecke $B\Delta$ verlängert, so ist $A\Delta \cdot \Delta B + \Gamma B^2 = \Gamma\Delta^2$.

(Fig. 6.) Der Satz $(2a+b)b+a^2=(a+b)^2$ ist unmittelbar anschaulich, wenn man von dem Quadrat über $(a+b)$ ausgeht, also von ΓZ.

7.

Wenn eine Strecke beliebig zerschnitten wird, so sind die beiden Quadrate aus der ganzen Strecke und einem der Teile [zusammen] gleich dem doppelten Rechteck aus der Strecke und dem gewählten Teile und dem Quadrat des andern Teils.

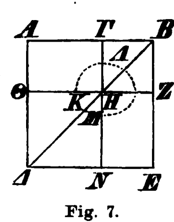


Fig. 7.

Die Strecke AB beliebig in Γ geteilt, so ist $AB^2 + B\Gamma^2 = 2AB \cdot B\Gamma + \Gamma\Delta^2$ (Fig. 7). Formel $(a+x)^2 + a^2 = 2(a+x)a + x^2$.

Der Beweis läfst sich, ähnlich wie der von 6, rein anschaulich führen, dadurch, dafs man zur Figur $NE^2 = \Gamma B^2$ hinzusetzt. Der Formel läfst sich die Form geben: $u^2 + v^2 = 2uv + (u-v)^2$, wo sie aussagt, dafs die Summe der Quadrate zweier Strecken (Gröfsen) ihr doppeltes Rechteck (Produkt) stets um das Quadrat der Differenz übertrifft. Ferner: $(u-v)^2 = u^2 + v^2 - 2uv$, die bekannte Formel über das Quadrat der Differenz.

8.

Wenn eine Strecke beliebig geteilt wird, so ist das vierfache Rechteck aus der ganzen [Strecke] und einem der Teile samt dem Quadrat des anderen Teiles gleich dem über der ganzen Strecke und dem gewählten Teil, als wären sie eine, beschriebenen Quadrat.

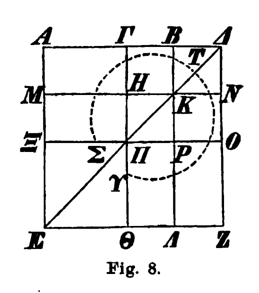


Fig. 8.

(Fig. 8.) Die Strecke AB beliebig zerschnitten im Punkte Γ. Ich behaupte, dafs $4AB \cdot B\Gamma + A\Gamma^2 = (AB + B\Gamma)^2$.

Es werde AB um ΓB verlängert bis Δ und über $A\Delta$ das Quadrat konstruiert $AEZ\Delta$ und die zweifache Figur (d. h. die Figur mit 2 Paaren „Ergänzungen"). Beweis folgt aus I, 43, da $HP = PN = K\Delta$. Der Beweis kann auch ohne die Parallelen durch B und K geführt werden, da $4\Gamma K = \Gamma O$ ist. Die Formel ist $4(a+b)a+b^2 = [(a+b)+a]^2$. Der Satz ist von 6 nicht verschieden.

9.

Wird eine Strecke in gleiche und in ungleiche Abschnitte zerschnitten, so ist die Summe der Quadrate der ungleichen Abschnitte doppelt so grofs, als die Summe der Quadrate der halben Strecke und des Zwischenraumes zwischen den Teilpunkten.

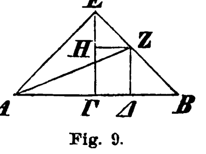


Fig. 9.

(Fig. 9.) AB in Γ in gleiche, in Δ in ungleiche Teile geteilt, so soll $A\Delta^2 + \Delta B^2 = 2(A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2)$. Man errichte in Γ das Lot $\Gamma E = A\Gamma = B\Gamma$ und ziehe AE und BE und durch Δ zu ΓE die Parallele ΔZ, durch Z aber der Geraden AB parallel ZH und verbinde A mit Z. Dann sind $A\Gamma E$, $B\Gamma E$ gleichschenkelig rechtwinkelige Dreiecke, also AEB ein rechter und durch $E\Gamma$ halbiert, ferner EHZ gleichschenkelig rechtwinkelig, und $Z\Delta B$ desgleichen, also $AZ^2 = AE^2 + EZ^2 = 2(A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2)$ und $AZ^2 = A\Delta^2 + \Delta Z^2$ also $2(A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2) = A\Delta^2 + \Delta B^2$ q. e. d.

Der hübsche Beweis weicht von der Art der bisherigen ab, in Pfleiderers Scholien finden sich viele verschiedene Beweise, die ihn auf die früheren zurückführen. Die Formel, die er giebt

$$a^2 + b^2 = 2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2\right] = 2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]$$

bezw. $2(a^2+b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2$, läfst sich verallgemeinern und ist die bekannte Transformationsformel für quadratische Formen.

Da $(a-b) = 0$, sowie $a = b$, so folgt: Die Summe zweier Quadrate, deren Seitensumme konstant ist, ist am kleinsten, wenn die Seiten gleich sind (L'Huilier de relatione mutua capacitatis etc. . . . Varsoviae 1782).

10.

Wird eine Strecke [AB in Γ] halbiert und um eine beliebige Strecke [$B\Delta$] verlängert, so ist $A\Delta^2 + \Delta B^2 = 2(A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2)$.

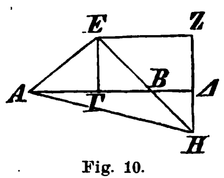


Fig. 10.

(Fig. 10.) Man ziehe von Γ senkrecht zu AB das Lot ΓE gleich $A\Gamma$ bezw. ΓB etc. Es ist $\Delta B = \Delta H$ (Winkel von 45°) und desgleichen $EZ = ZH$, also $A\Delta^2 + \Delta B^2 = AB^2 = AE^2 + EB^2 = 2A\Gamma^2 + 2\Gamma\Delta^2 = 2(A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2)$. Formel $(2a+b)^2 + b^2 = 2(a^2 + (a+b)^2)$.

11.

[Aufgabe.] Eine gegebene Strecke so zu schneiden, dafs das Rechteck aus der ganzen und dem einen Abschnitt gleich ist dem Quadrat des andern Abschnitts.

(Fig. 11.) Sei die gegebene Strecke die AB. Man soll nnn die AB schneiden, so dafs das Rechteck aus der ganzen etc. Es werde das Quadrat von AB gezeichnet: $AB\Delta\Gamma$, und $A\Gamma$ halbiert im Punkte E, und B mit E verbunden und ΓA durchgeführt nach Z und BE der EZ gleich gesetzt, und das Quadrat von AZ gezeichnet: $Z\Theta$; so behaupte ich, dafs AB in Θ so geteilt ist, um das Rechteck aus AB und $B\Theta$ dem Quadrat von $A\Theta$ gleich zu machen.

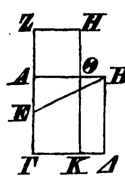


Fig. 11.

Denn da $A\Gamma$ in E halbiert ist, und ZA ihr zugesetzt ist, so ist $\Gamma Z \cdot ZA + AE^2 = EZ^2$ (S. 6).

Aber $EZ = EB$, folglich $AZ \cdot ZA + AE^2 = EB^2$.

Aber $EB^2 = BA^2 + AE^2$, denn der Winkel bei A ist ein rechter:

Folglich $\Gamma Z \cdot ZA + AE^2 = BA^2 + AE^2$.

Auf beiden Seiten werde AE^2 fortgenommen, so ist nun der Rest, das Rechteck aus ΓZ und ZA, gleich AB^2.

Und es ist $\Gamma Z \cdot ZA = ZK$, denn $AZ = ZH$; und $AB^2 = A\Delta$.

Folglich $ZK = A\Delta$. Beiderseits soll AK weggenommen werden; so ist der Rest nämlich $Z\Theta$ dem $\Theta\Delta$ gleich, und es ist $\Theta\Delta$ das Rechteck aus AB und $B\Theta$, weil AB der $B\Delta$ gleich ist; aber $Z\Theta$ das [Quadrat] von (der) $A\Theta$. Folglich ist das Rechteck aus AB und $B\Theta$ dem Quadrat von ΘA gleich.

Also ist etc. . . ., wie z. thun war.

Hier tritt also die Teilung nach dem goldenen Schnitt, oder die stetige Teilung zuerst auf, sie ist zugleich die Lösung der quadratischen Gleichung $a(a-x)=x^2$ und wird hier auf die Lösung von $x(x+a)=a^2$ zurückgeführt, bezw. wird hier schon gezeigt, dafs der Minor einer ersten Teilung zugleich der Major der Teilung des ersten Major ist. Die Teilung tritt noch einmal auf in VI, 30. Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dafs damit auch das System $x+y=a$, $xy=x^2-y^2$ gelöst ist, ebenso wie die geometrische Aufgabe: ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, in dem die linke Kathete gleich dem rechten Höhenabschnitt. Die Analyse ging, das zeigt der Gang des Beweises, aus dem Satz 4 hervor und führte damit auf die Konstruktion der Quadratwurzel aus 5.

12.

In (den) stumpfwinkligen Dreiecken ist das Quadrat der den stumpfen Winkel unterspannenden Seite gröfser als die Quadrate der den stumpfen Winkel einschliefsenden Seiten um das doppelte Rechteck aus einer von den [Seiten] um den stumpfen Winkel, welche das Lot schneidet, und dem Stück, welches das Lot aufsen am stumpfen Winkel abschneidet.

B Δ A Γ

Fig. 12.

(Fig. 12.) $AB\Gamma$ das Dreieck, $BA\Gamma$ der stumpfe Winkel, $B\Delta$ das Lot. Behauptung:

$$B\Gamma^2 = BA^2 + A\Gamma^2 + 2\Gamma A\cdot A\Delta.$$

Weil nämlich die Strecke $\Gamma\Delta$ in A geschnitten ist (wie es traf), ist $\Delta\Gamma^2 = \Gamma A^2 + A\Delta^2 + 2\Gamma A\cdot A\Delta$ (4).

Auf beiden Seiten füge ΔB^2 hinzu, so folgt (ἄρα) $\Gamma\Delta^2 + \Delta B^2 = \Gamma A^2 + A\Delta^2 + \Delta B^2 + 2\Gamma A\cdot A\Delta$.

Aber $\Gamma B^2 = \Gamma\Delta^2 + \Delta B$; $AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2$, also $\Gamma B^2 = \Gamma A^2 + AB^2 + 2\Gamma A\cdot A\Delta$. q. e. d.

13.

Im spitzwinkligen Dreieck ist das Quadrat der den spitzen Winkel unterspannenden Seite kleiner als die Quadrate der den spitzen Winkel einschliefsenden Seiten um das doppelte Rechteck aus einer der [Seiten] um den spitzen Winkel, welche das Lot schneidet und dem Stück, welches das Lot innen am spitzen Winkel abschneidet.

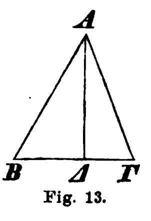


Fig. 13.

(Fig. 13.) Der Beweis ist dem vorigen ganz analog.

Zu bemerken ist 1) der Gebrauch des bestimmten Artikels, welcher unsere Auffassung der ersten Forderung auf das intensivste bestätigt und ganz klar macht, dafs eine mündliche Demonstration vorausgesetzt wird. 2) Ohne weiteres wird aus der Anschauung angenommen, dafs Δ das eine Mal aufserhalb, das andere Mal innerhalb fällt.

Die Stellung der Sätze im System ist bemängelt worden, in der That kann man die Sätze 12, 13, 14 unmittelbar an den Pythagoras schliefsen.

Sehr hübsch ist die Art, wie Coets (Hendric) durch Vergleichung mit dem rechtwinkligen Dreieck (Fig. 13a) beweist, dafs $AC < EC$. also $AC^2 < AB^2 + BC^2$ ist und $A'C > EC$ also $A'C^2 > EC^2$ ist. Ich füge den von Coets (1641?) gegebenen Beweis zu 12 hinzu, der aus der Figur (13b) unmittelbar erhellt. Ein sehr anschaulicher Beweis, der sich ganz eng an den Euclidischen Beweis des Pythagoras anschliefst, rührt von Gregora St. Vincentio, Schüler von Clavius und Jesuit wie dieser, her; er findet sich oft in den Lehrbüchern ohne Quellenangabe.

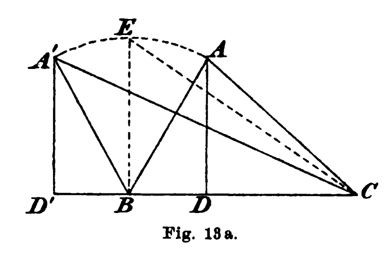


Fig. 13a.

Es ist schon früh (Campanus, Isaacus Monachus) bemerkt worden, dafs Satz 13 zu eng gefafst ist und heifsen mufs: In jedem Dreieck ist das Quadrat einer einen spitzen Winkel etc. und Lorenz hat den Satz so geändert. Angesichts der Einstimmigkeit der Quellen habe ich (nach Heiberg) den Wortlaut gelassen. Dafs Euclid die allgemeine Geltung bekannt war, folgt aus S. 65 der Data. Euclid ist wohl durch die Symmetrie zu 12 zu seiner Fassung veranlafst. Es fehlen übrigens auch die Umkehrungen der Sätze, welche Clavius analog von I, 48 gegeben hat. Die Sätze selbst, welche ja nichts anderes sind, als der Cosinussatz, spielen

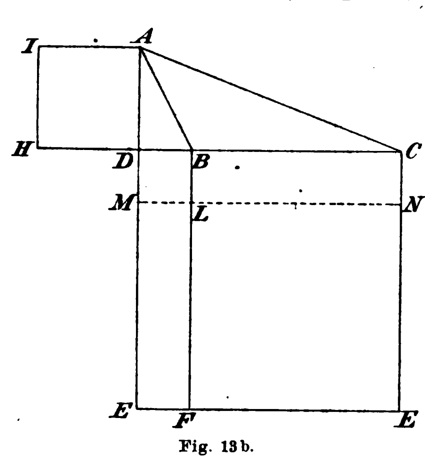


Fig. 13b.

im System eine geringe Rolle; nur 12 wird zum Beweis von XII, 17 (zweiter Teil) herangezogen. Bei Pappos finden sich viele Anwendungen, darunter die bekannten $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + m^2$, wo m die Mittellinie, und: im gleichschenkligen Dreieck übertrifft das Quadrat jedes Schenkels das Quadrat einer beliebigen Verbindung der Spitze mit der Basis um das Rechteck aus den Abschnitten.

14.

[Das] Quadrat zu konstruieren, welches der [einer] gegebenen geradlinigen Figur gleich ist.

(Fig. 14.) Die Figur sei A. Konstruiere (I, 45) ein der Figur A gleiches Rechteck (das hier) $B\varDelta$. Wenn nun BE gleich $E\varDelta$ ist, wäre die Aufgabe fertig. Denn es steht da dem geradlinigen (εὐθυγράμμος) A gleich das Quadrat, hier das $B\varDelta$. Wenn aber nicht, so ist eine von BE und $E\varDelta$ die gröſsere. Es soll die gröſsere hier (ἡ) BE sein und soll bis Z ausgezogen werden und EZ gleich $E\varDelta$ gesetzt werden und BZ in H gehälftet werden und mit dem Zentrum H in dem Abstand (Radius) entweder von HB oder HZ der Halbkreis $B\Theta Z$ beschrieben, und $\varDelta E$ bis Θ verlängert und H mit Θ verbunden.

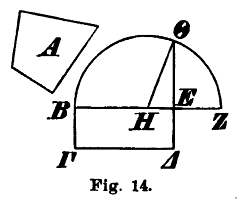


Fig. 14.

Weil nun die Strecke BZ in H in gleiche und in E in ungleiche Teile zerschnitten ist, so ist

$$BE \cdot EZ + EH^2 = HZ^2 \quad (5)$$

aber $HZ = H\Theta$, folglich $BE \cdot EZ + EH^2 = H\Theta^2$.

Aber $H\Theta^2 = \Theta E^2 + EH^2$, folglich $BE \cdot EZ + HE^2 = \Theta E^2 + EH^2$. Nimm auf beiden Seiten HE^2 weg. Der Rest nun, das Rechteck aus BE und EZ ist dem Quadrat von $E\Theta$ gleich. etc.

Vor allem mache ich wieder auf den Unterschied im Gebrauch des bestimmten und unbestimmten Artikels zwischen unserer und der griechischen Sprache aufmerksam und wie auch hier die volle Eindeutigkeit durch das Weglassen des Artikels und Zahlenwertes gekennzeichnet wird. Der Grund, warum die Aufgabe am Schluſs von Buch II steht, ist einfach der, daſs jetzt die Brauchbarkeit des Kreises an dieser fundamentalen Aufgabe so recht deutlich wieder hervortritt und sich nun die Betrachtung dem Kreise zuwendet, dem das dritte Buch gehört.

Robert Simson hat (cf. Pfleiderer) schon bemerkt, dafs die Unterscheidung von BE und $E\Delta$ überflüssig; in unserem heutigen Lehrgang ist dies gerade der Vorzug dieser Konstruktion, welche den Satz aus der Satzgruppe des Pythagoras enthält: Das Quadrat der Höhe etc. vor der andere, welcher den Satz derselben Gruppe braucht: Das Quadrat der Kathete etc. Die Sätze selbst kommen als sehr verdächtige Zusätze zu VI, 8 in den Elementen vor.

III. [Buch.]

Erklärungen.

1)[1]) Gleich sind die Kreise, deren Durchmesser oder deren Radien[2]) gleich sind.

2)[3]) Man sagt: eine Gerade berührt den Kreis, wenn sie mit dem Kreis zusammentrifft und verlängert ihn nicht schneidet.

3)[4]) Man sagt: Kreise berühren einander, wenn sie zusammentreffen ohne sich zu schneiden.

4) Man sagt: Dafs Gerade innerhalb[5]) des Kreises vom Zentrum gleich weit abstehen, wenn die vom Zentrum aus bis zu ihnen hin gezogenen Lote gleich sind.

5) Und dafs die weiter abstehe, bis zu der das längere Lot geht.

6) Kreisabschnitt (Segment) ist die Figur, welche von einer Geraden und der[6]) Peripherie des Kreises begrenzt wird.

7) Winkel des Kreisabschnitts heifst der Winkel[7]) zwischen der Geraden und der Peripherie.

8) Nimmt man auf dem Bogen des Segments irgend einen Punkt und verbindet ihn mit den Endpunkten der Geraden, welche die Basis[8]) des Segments heifst, so heifst der Winkel zwischen den Verbindungsgeraden Winkel im Segment.

9) Wenn aber Gerade, welche einen Winkel einschliefsen, einen Bogen abschneiden, so sagt man, der Winkel stehe[9]) auf jenem [Bogen].

10)[10]) Kreisausschnitt (Sektor) heifst die Figur, welche enthalten ist zwischen zwei vom Zentrum ausgehenden Geraden und dem Bogen, welchen sie begrenzen.

11) Gleichartige (Ähnliche) Kreisabschnitte sind solche, welche gleiche Winkel fassen (Def. 9) oder deren Winkel (Def. 8) gleich sind.

Anmerkungen.

1) Über den Grund, weshalb Euclid den Satz in Def. 1 nicht beweist, vgl. die Note zu Post. 4.

Der terminus technicus „radius“, griech. „ἀκτὶς“ findet sich weder im griech. noch im arab. Euclid. Euclid, Archimedes, Heron, Pappus etc. sagen „ἡ ἐκ [τοῦ] κέντρου“; radius (wie ακτιν oder ακτις) vom Stamme rad bedeutet ein geschabtes Stäbchen, das auch zum Figurenzeichnen (Cic. Tusc. etc.) der Feldmesser diente, dann auch cf. Boötius eine bestimmte Länge erhielt, und als Meſsinstrument diente; es wurde vermutlich früh zum Kreisziehen im Felde verwandt, bekommt die Bedeutung „Radspeiche“ und Strahl, aber schon Cicero Timaeus cap. 6 „cujus omnis extremitas paribus a mediis radiis attingitur“ kennt es in unserm heutigen Sinne, und so haben es vermutlich die röm. Agrimensoren gebraucht. Im mittelalterlichen Latein heiſst es nach dem Arabischen: „Semidiameter“ und so noch 1607 bei Clavius, bei Sturm (J. Chr.), in der Mathesis enucleata schon: Radiis sive semidiametris und bei Leibniz und Chr. Wolf schon nur Radius, vermutlich aus dem franz. rayon.

2) Hier zeigt sich, daſs die Übersetzung von ἅπτεσθαι mit berühren falsch ist (vgl. Note zu Def. 8, B. I), es muſs zwischen ἐφάπτεσθαι „berühren“ und „ἅπτεσθαι“ zusammentreffen unterschieden werden und „ἁφή“ ist mit „Treffpunkt“ zu übersetzen.

3) Wie 2; es mag daran erinnert werden, daſs E. unter Kreis schlechtweg die Fläche, nicht die Linie versteht.

4) Den Fall, daſs die Gerade auſserhalb der Kreisfläche verläuft, berücksichtigt E. nicht.

6) Der Kreisabschnitt, das Segment allgemein τμῆμα von τεμνω schneiden; für Kreisabschnitte, die kleiner als der Halbkreis, hat Heron in den Definitionen den noch heute in der Architektur gebräuchlichen Kunstausdruck ἀψίς“ (Apsis), der Kunstausdruck „Bogen“ (arcus) für ein Stück des Umkreises war den Griechen fremd, ihr Kriegsgerät war der καμπυλον τοξον ∿, der (kurvenförmige) krumme Bogen, und ihre Sehne war nur an einem Ende angespannt, und der Bogen wurde durch Zusammendrücken gespannt. Die Worte „Bogen“, „Sehne“ („Pfeil“) sind vermutlich von den Indiern zu den Arabern gekommen, wo sie sich ganz früh, z. B. schon bei den „lauteren Brüdern“ (10. Jahrh.) finden, und in dem „Buch des Maſses“, dessen hebräischen Text Steinschneider ediert hat. Daher finden sich beim Campanus, der ja

arab. Quellen benutzte, „arcus“ und chorda, dagegen beim Zamberti nicht. Die Kunstworte verbreiteten sich langsam, Clavius braucht sie nicht und Barrow 1650 auch noch nicht. Für Peripherie findet sich bei Heron in den Definitionen, von denen ich mit Tannery nach genauerem Studium des Proclus auch glaube, daſs sie Geminus gehören, auch Perimetros.

Im Wortlaut der Def. 6 beachte man den Wegfall des Artikels vor *περιφερ.*

7) Der Winkel ist gemischtlinig, die Definition setzt bereits voraus, daſs die beiden Winkel an den beiden Endpunkten der Sehne gleich sind, was Euclid aber nicht besonders beweist. Die Definition des Winkels von Apollonios paſst hier besser, sie ist in die Definitionen Herons aufgenommen und ich sehe darin ein Argument, das für Geminos spricht.

8) Das Wort Basis wird sehr oft gebraucht, es kommt aus der Geodäsie, von *βαινω* „schreiten“, allgemeine Erklärung in der Geometria Heron. S. 44, N. 7. „Sehne“ wird meist mit *εν κυκλῳ ευθεια* (Gerade im Kreis) bezeichnet.

9) Das Perf. von „*βαινω*“ bedeutet „stehen“.

10) Griech. *τομεὺς*, aktiv, soviel wie „einer, der schneidet“, daher richtig mit „Sektor“ wiedergegeben. Die hier gewählte abgekürzte Fassung der Definition ist nach Campanus bezw. arabischen Ursprungs.

Das häufige Fehlen des Artikels vor *κυκλος* zeigt, daſs sich die Sätze auf einen einzigen vorliegend gedachten Kreis beziehen. Übrigens ist der Sprachgebrauch im 3. Buch nicht mehr so fest wie im 1. und 2., das 3. Buch vielleicht auch im Vaticanus nach der Bearbeitung von Theon erhalten.

Satz 1. [Aufgabe.]

Das Zentrum eines gegebenen Kreises zu finden.

Fig. 1.

(Fig. 1.) Man ziehe in ihm irgend eine Sehne AB, halbiere sie in Δ, errichte in Δ die Senkrechte $\Delta\Gamma$, verlängere sie bis E, halbiere ΓE in Z, so ist Z das Zentrum des Kreises $AB\Gamma$.

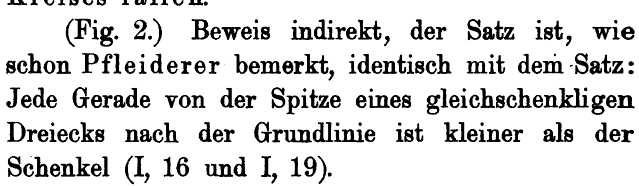
Z sei es nicht, sondern, wenn möglich, soll es H sein, und es mögen HA, $H\Delta$, HB gezogen werden; dann wäre $A\Delta H \cong B\Delta H$ (I, 8), also $\sphericalangle A\Delta H = H\Delta B$, also $\sphericalangle Z\Delta B = H\Delta B$, der gröſsere dem kleineren gleich, was unmöglich.

Zusatz.

Hieraus ist ersichtlich, dafs, wenn im Kreise eine Gerade eine Sehne in der Mitte und senkrecht schneidet, auf der Schneidenden das Zentrum des Kreises liegt.

Der Satz 1 wird von Proclus p. 302 als Beispiel eines „Porisma“ im weiteren Sinne angeführt; der Beweis ist, wie vielfach im 3. Buch, indirekt, weil der zu beweisende Satz eigentlich lautet: das Zentrum kann nicht aufserhalb der Mittelsenkrechten der Sehne liegen.

2.



Werden auf der Peripherie des Kreises zwei beliebige Punkte herausgegriffen, so wird die Gerade, welche die Punkte verbindet, innerhalb des Kreises fallen.

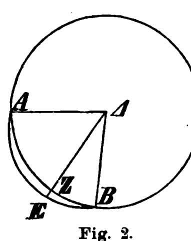


Fig. 2.

(Fig. 2.) Beweis indirekt, der Satz ist, wie schon Pfleiderer bemerkt, identisch mit dem Satz: Jede Gerade von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks nach der Grundlinie ist kleiner als der Schenkel (I, 16 und I, 19).

3.

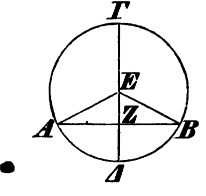


Fig. 3.

Wenn im Kreise eine Gerade durch das Zentrum eine Sehne, die nicht durchs Zentrum geht, in der Mitte schneidet, so schneidet sie die Sehne auch rechtwinklig, und wenn sie die Sehne rechtwinklig schneidet, so schneidet sie sie auch in der Mitte.

(Fig. 3.) Auch Satz 3 ist identisch mit Sätzen über das gleichschenklige Dreieck.

4.



Fig. 4.

Wenn zwei Sehnen[1]), welche nicht durch das Zentrum gehen, einander schneiden, so halbieren sie sich nicht gegenseitig.

(Fig. 4.) Beweis indirekt, $ZE\Delta$ und ZEB müfsten als rechte Winkel einander gleich sein.

1) „Sehne“ wiedergegeben durch „Gerade im Kreise“.

5.

Falls sich zwei Kreise schneiden sollten, wird ihnen das Zentrum nicht gemeinsam sein.

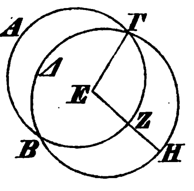


Fig. 5.

(Fig. 5.) „Denn wenn [das Gegenteil] möglich, sei es E, und es werde E mit Γ verbunden und EZH beliebig gezogen“, dann müfsten EZ und EH, weil beide gleich $E\Gamma$, gleich sein, was unmöglich.

Zu bemerken ist hier wieder der Anteil der Anschauung am Beweise wie am Satze.

6.

Wenn sich zwei Kreise berühren, haben sie das Zentrum nicht gemeinsam.

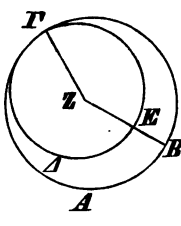


Fig. 6.

(Fig. 6.) Beweis indirekt wie in 5; Euclid behandelt nur die innere Berührung, da der andere Fall keines Beweises bedarf.

7.

Nimmt man auf einem* Durchmesser des* Kreises einen Punkt, der nicht das Zentrum ist, und zieht von diesem Punkt aus bis an den Kreis hin irgend welche Geraden [Strecken], so ist die gröfste, auf der das Zentrum, die kleinste aber der Rest; von den anderen ist immer die [der durch das Centrum] der Gröfsten nähere gröfser als die fernere; und es gehen nur [je] zwei gleiche vom Punkt zum Kreis, auf jeder von beiden Seiten der kleinsten.

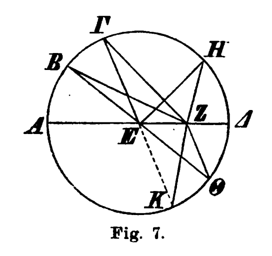


Fig. 7.

(Fig. 7). $A\Delta$ der Durchmesser, Z der Punkt, ZA, ZB, $Z\Gamma$, ZH die Strahlen, man zieht die Radien EB, $E\Gamma$, EH, und wendet I, 20 an, so folgt $ZA > ZB$; dafs $ZB > Z\Gamma$ folgt uns I, 24 (sind in 2 Dreiecken zwei Seiten gleich etc.). Ferner da $ZH + EZ > EH$, also auch $> E\Delta$, so folgt durch Wegnahme von EZ, dafs $ZH > Z\Delta$. Schliefslich folgt aus dem 1. Kongruenzsatz, dafs zwei symmetrisch zu $Z\Delta$ liegende Strecken ZH und $Z\Theta$ gleich sind, und aus Anwendung des zweiten Teils des Satzes 7, dafs nur $Z\Theta$ gleich ZH ist.

Griechisch der bestimmte Artikel vor Durchmesser und kein Artikel vor Kreis, d. h. also der Artikel ist demonstrativ und der Kreis wird als der ganz bestimmte einzige, von dem stets die Rede ist, betrachtet.

8.

Wenn aufserhalb [des] Kreises irgend ein Punkt genommen wird, und von diesem (hier) an den Kreis [da] irgend welche Geraden gezogen werden, eine durch das Zentrum, die andere, wie es trifft —, so ist von den bis an die Konkavität des Umfangs gehenden Geraden die durch das Zentrum die gröfste, von den anderen immer die ihr nähere gröfser als die ihr fernere; von den bis an die Konvexität gehenden ist die kleinste die zwischen dem Punkt und dem Durchmesser, von den anderen aber ist immer die ihr nähere kleiner als die ihr fernere.

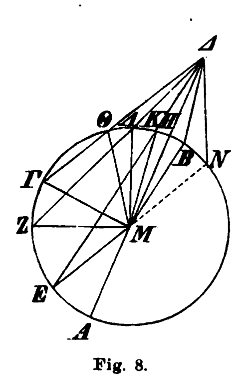


Fig. 8.

(Fig. 8.) Beweis wie in 7. Getadelt ist oft das Fehlen der Definition von Konkavität und Konvexität; sie findet sich in der Definition Herons Nr. 34. „Jede Kreislinie heifst, wenn man sie von innen anschaut, 'hohl' (konkav), wenn von aufsen, 'erhaben' (konvex).“

9.

Wenn innerhalb des Kreises ein Punkt herausgegriffen wird und von diesem Punkt aus bis an den Kreis mehr als zwei gleiche Geraden gehen, so ist der herausgegriffene Punkt [das] Zentrum des Kreises.

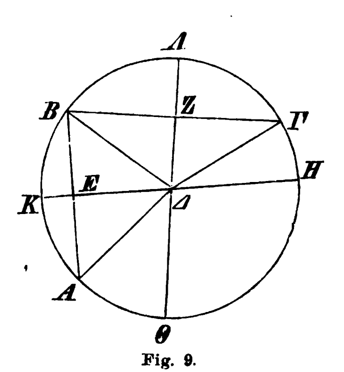


Fig. 9.

(Fig. 9.) Direkter Beweis. Wenn E und Z die Mitten von AB und $B\Gamma$ sind, so sind, falls $\Delta A = \Delta B = \Delta\Gamma$ ist, die Dreiecke $AE\Delta$ und $BE\Delta$ kongruent und ebenso $B\Delta Z \cong \Gamma\Delta Z$, somit, nach Satz 1, Zusatz, sind die KH und $\Lambda\Theta$ Durchmesser und ihr Schnitt Δ das Centrum.

Hätte Euclid einen indirekten Beweis geben wollen, so konnte er den Satz unmittelbar aus Satz 7 folgern.

10.

Kreis schneidet Kreis in nicht mehr als zwei Punkten.

(Fig. 10.) Beweis indirekt. Hätten die Kreise auch nur die 3 Punkte Θ, B, H, gemeinsam, so müfste Θ durch Satz 1, Zusatz, das Zentrum beider Kreise sein, und dies verstöfst gegen Satz 5.

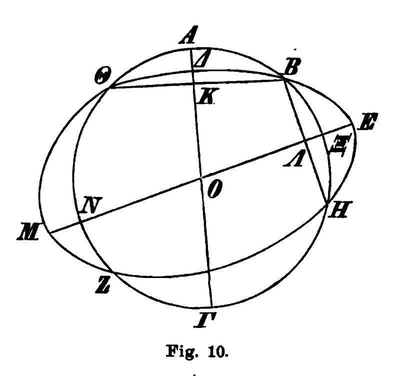


Fig. 10.

11.

Wenn sich zwei Kreise von innen berühren, und ihre Zentren genommen [konstruiert Satz 1] werden, so trifft die Verbindungsgerade der Zentren, in der Verlängerung einen* Treffpunkt.

(Fig. 11.) Beweis indirekt, Z Zentrum von $AB\Gamma$, H von $A\Delta E$, ZH fiele wie $ZH\Theta$ und man ziehe AZ, AH. Da $AH + HZ > ZA$, also auch $> Z\Theta$, so wäre $AH > H\Theta$, also $H\Delta > H\Theta$, was unmöglich.

Im Griechischen steht der bestimmte Artikel, aus Satz 13 folgt, dafs er deutsch durch den unbestimmten Artikel wiedergegeben werden mufs; auch bei diesem Satz und Beweis fällt der Hauptteil auf die Anschauung.

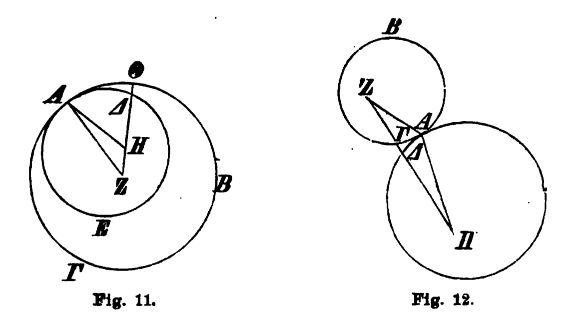


Fig. 11. Fig. 12.

12.

Falls sich zwei Kreise von aufsen berühren sollten, wird die ihre Zentren verbindende [Gerade] durch eine Berührungsstelle gehen.

(Fig. 12.) Beweis indirekt. Widerspruch gegen I, 20.

13.

Kreis berührt Kreis in nicht mehr als einem Punkte, er möge von innen oder von aufsen berühren.

Beweis indirekt (Fig. 13). Fall 1) B und Δ seien die Berührungsstellen, H und Θ die Zentren, dann geht nach Satz 11 $H\Theta$ durch B und Δ, es wäre also $BH = H\Delta$ und $BH + H\Theta = H\Delta - H\Theta$, was absurd. — Fall 2) $A\Gamma$ müfste im Innern beider Kreise liegen, nach Satz 2, die Kreise also sich schneiden. (Anschauung!)

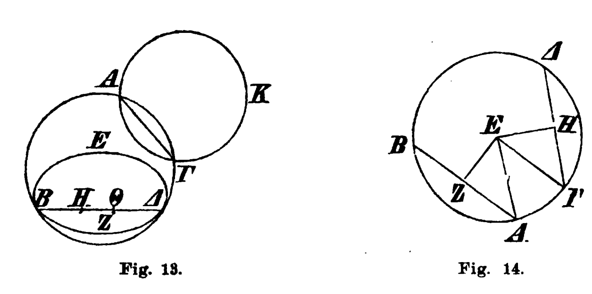


Fig. 13. Fig. 14.

14.

Gleiche Sehnen haben vom Zentrum gleichen Abstand, und Sehnen, welche gleichen Abstand vom Zentrum haben, sind gleich.

(Fig. 14.) Beweis durch den Pythagoras.

Der heute übliche Beweis benutzt den sogen. 4. Kongruenzsatz, der bei Euclid fehlt; es ist aber hervorzuheben, dafs der Satz ohne 4. Kongruenz und ohne Pythagoras bewiesen werden kann; wie z. B. bei Campanus (arab. Euclid).

15.

Die gröfste [Sehne] im Kreis ist der Durchmesser, von den andern ist immer die dem Zentrum nähere gröfser als die fernere.

Fig. 15.

(Fig. 15.) Wenn ZH die fernere, $B\Gamma$ die nähere ist, so ist nach Satz 14 $MN = B\Gamma$ und die Dreiecke MEN und ZEH stimmen in 2 Seiten überein, während $\sphericalangle MEN > ZEH$ ist, also nach I, 24 MN oder $B\Gamma > ZH$.

Dieser vom Parallelenaxiom unabhängige Beweis ist heute so ziemlich durch den, der den Pythagoras und damit das

Parallelenaxiom benutzt, verdrängt; selbst in dem angeblich so euclid England (vgl. A Text-Book of E. Elem. Hall and Stevens 1899), Grund vermutlich, weil dieser Beweis die Anschauung benutzt, und die Leute euclidischer sein wollen als Euclid.

16.

Die Gerade, welche zu einem Durchmesser eines Kreises im Endpunkt senkrecht gezogen wird, wird aufserhalb des Kreises fallen und in den Zwischenraum zwischen der Geraden und der Peripherie wird keine andere Gerade hineinfallen, und der Winkel des Halbkreises ist gröfser als jeder spitze geradlinige Winkel, der Rest aber kleiner.

(Fig. 16.) a) Die Annahme, dafs das Lot schneide, etwa in Γ, verstöfst mittelst I, 5 gegen I, 17. b) Liefse sich zwischen Kreis und Lot etwa AZ ziehen und wäre ΔH senkrecht zu AZ, so müfste (I, 19) $A\Delta > H\Delta$, also auch $\Delta\Theta > H\Delta$ sein, was gegen die Anschauung verstöfst. c) Wörtlich.

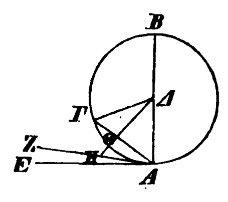


Fig. 16.

Ich behaupte, dafs auch der Winkel des Halbkreises, der von der Geraden BA und der Peripherie $\Gamma\Theta A$ begrenzte, gröfser ist als jeder spitze geradlinige Winkel, der Rest aber, der von der Peripherie $\Gamma\Theta A$ und der Geraden AE begrenzte, kleiner als jeder spitze geradlinige Winkel.

Denn wenn ein geradliniger Winkel existierte, gröfser als der von der Geraden BA und dem Bogen $\Gamma\Theta A$ begrenzte, oder einer der kleiner als der zwischen den Bogen $\Gamma\Theta A$ und der Geraden AE, dann wird in den Zwischenraum zwischen der Peripherie und der Geraden AE eine Gerade hineinfallen, welche den Winkel machen wird, der gröfser ist als der zwischen der Geraden BA und der Peripherie $\Gamma\Theta A$ und den, der kleiner ist als der zwischen der Peripherie $\Gamma\Theta A$, und der Geraden AE. Aber sie fällt nicht hinein [wie sub b) bewiesen].

Zusatz.

Hieraus ist zu ersehen, dafs die Senkrechte im Endpunkte eines Durchmessers eines Kreises den Kreis berührt.

In dem dritten Teil des Satzes 16 liegt der Ursprung des bekannten Streits über den sogen. Kontingenzwinkel, d. i. den Winkel zwischen der Kurve und ihrer Tangente. Zunächst erscheint der ganze

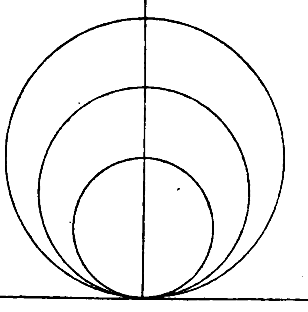
dritte Teil samt seinem Beweis, wie Vieta, Viviani und Rob. Simson bemerken, verdächtig, da er nichts weiter beweist, als was schon im zweiten Teil bewiesen, nämlich, dafs zwischen der Kurve und der berührenden Linie erster Ordnung sich keine andere Linie erster Ordnung ziehen lasse. Aber jedenfalls ist er schon sehr früh in die Elemente aufgenommen, da er sich in allen Codices findet. Er ist eine Folge der schon in Definition 8, Buch I hervortretenden Unklarheit über den Begriff des Winkels; es gehen die beiden Motive: „Richtungsunterschied“ scilicet „Mafs desselben“ und „Flächengröfse“, welche von den den Winkel begrenzenden Linien umfangen wird, stark durcheinander. Beim krumm- (κερατοειδής, hornförmig) oder gemischt-linigen kommt nur das erste Motiv in Frage, beim geradlinigen mehr und mehr das zweite. Dafs der Teil 3 des Satzes schon früh Anstofs erregte, geht aus Proclus hervor, und ebenso aus Campanus p. 67. Bei der Bedeutung, welche die Diskussion über den „Kontingenzwinkel“ für die Klärung der wichtigsten geom. Begriffe gehabt, ist darauf näher einzugehen.

Der Name „Angulus contingentiae“ rührt von Jordanus her, dem grofsen Ordensgeneral der Dominikaner 1220, wo er sich in dem von Max. Curtze herausgegebenen Werke „de triangulis“ findet, auch Clavius beruft sich auf Jordanus als Gewährsmann. Campanus weist l. c. (mit den Worten des Proclus) nach, dafs der 3. Teil des S. 16 gegen das Prinzip (des Bryson) verstöfst, wonach eine stetige Gröfse von einem Wert zum andern durch alle Zwischenwerte hindurchgeht, und er bemerkt auch, dafs der Kontingenzwinkel zweier sich berührender Kreise sich teilen lasse. Von einem Verstofs gegen X, 1, den berühmten ersten Konvergenzsatz: „Nimmt man von einer Gröfse mehr als die Hälfte weg, vom Rest desgleichen und so fort, so kommt man schliefslich zu einem Rest, der kleiner ist als jede noch so klein vorgegebene Gröfse“, ist bei Campanus l. c. nicht die Rede, und die Angabe Cantors B. 2, S. 104 beruht wohl auf einer Verwechselung mit Pelletier.

Der Jesuit Peletarius gab 1557 die Elemente heraus und vielleicht veranlafst durch Cardanus de subtilitate 1550 setzt er zu III, 16 hinzu: 1) Die Annahme einer kleinsten, bezw. einer gröfsten kontinuierlichen Gröfse ist ein falscher Grenzbegriff (extra intelligentiam est). 2) Teil 3 des Satzes 16 verstöfst gegen X, 1, insofern man nach X, 1 durch fortgesetztes Halbieren eines beliebigen spitzen Winkels zu einem spitzen Winkel gelangen mufs, der kleiner als der Konvergenzwinkel. 3) Der Konvergenzwinkel hat die Gröfse Null, denn die Tangente verschmilzt (immergit, versenkt sich) mit dem Kreis. 4) Der Winkel, den zwei sich von aufsen oder von innen berührende Kreise

bilden, hat die Gröfse Null. Dagegen wendet sich zuerst Candalla Flussatus (Euclid von 1566), der wieder Cardanus anregt, sich in dem opus novum de proport. 1570 mit den Beziehungen zwischen geradlinigen und gemischtlinigen Winkeln zu befassen. Cardanus bemerkt schon das Auftreten der Krümmung, wenn auch der Begriff hier noch völlig unklar ist.

Ganz besonders energisch aber nimmt Clavius in seiner ersten grofsen Euclid-Ausgabe von 1574 Stellung gegen Peletarius, und als dieser 1577 mit einer „Apologia" erwidert, entgegnet Clavius in der folgenden Röm. Ausgabe noch nachdrücklicher (1607 S. 241—66 sehr eng gedruckt). Er hebt hervor: 1) Euclid selbst sei unmöglich der Ansicht des Proclus gewesen, dafs der Konvergenzwinkel Null sei, „weil er sonst nicht so über dem Beweis geschwitzt hätte". 2) Dafs von einer Verletzung des Prinzips X, 1 nicht die Rede sein könne, da es sich nur auf Gröfsen beziehe, die ein Verhältnis nach Def. V, 4 haben; der gemischtlinige Winkel, insbesondere aber der Konvergenzwinkel, bezw. der des Halbkreises mit seinem Diameter sei der ganzen Art nach vom geradlinigen verschieden (wie schon Candalla) und mit dem ganz ähnlichen Bild des Candalla: Die gröfste Ameise sei immer noch unvergleichlich kleiner als der Mensch. 4) Zeigt er, dafs der Konvergenzwinkel zwar nicht durch Gerade, wohl aber durch Kreisbogen, s. Fig. 16a, beliebig vermindert oder vermehrt werden könne.


Fig. 16a.

Die letzte Betrachtung ist ganz besonders wichtig, sie ist fast wie der Streit G. Cantor's und Paul Dubois Raymond's über das Actual-Unendlichkleine. Wir haben hier eine der Quellen der Differentialrechnung vor uns. Diese (unendlich kleinen) Winkel sind unter sich vergleichbar und jedes Verhältnisses fähig; nur nicht mit den (endlichen) geradlinigen Winkelgröfsen.

An dem Streit beteiligten sich die gröfsten Namen der folgenden Zeit; ich nenne nur Vieta, Galilei, Wallis, Barrow, und den, der eigentlich die Lösung gab, „summum" Newton. Vieta im XIII. Kap. seiner Varior. de reb. math. responsorum 1593 sprach zum ersten Male klar und scharf es aus, dafs Kurven, welche sich berühren, an der Berührungsstelle ein Linienelement gemeinsam haben, und daher nach Def. 8, I als „in eandem lineam rectam coincidentes" keinen Winkel bilden; zugleich wird klar, dafs von einem Winkel, insofern er Mafs für Richtungs-

unterschiede ist, nur zwischen Geraden die Rede sein kann. Ähnlich Galilei 1639 und ausführlich Wallis 1656 im Buch de angulo contactus, wo er sagt, dafs die Kurve in jedem Punkt die Richtung ihrer Tangente hat. Da 1663 Leotaud in der Cyclomathia seinen Bundesbruder gegen Wallis in Schutz nahm, sah sich dieser 1685 zu einer „Defensio“ genötigt, hier finden sich Andeutungen über den heute Kontingenzwinkel genannten Winkel, zwischen zwei benachbarten Tangenten. Aber Newton erkannte den Kern in des Clavius Gedanken, er erkannte, vgl. Fig. 16^{a}, dafs das Variable an der Berührungsstelle die Krümmung sei, deren Mafs er umgekehrt proportional dem Radius desjenigen Kreises setzte, der sich der Kurve an der betreffenden Stelle so eng als möglich anschmiegt, und er sah, dafs von der Krümmung die relativ mehr oder mindere Schnelligkeit des Auseinandergehens von Kurve und Tangente (die rel. Gröfse des Clavius'schen Kontingenzwinkels) abhänge. Als Resultat des Streits, der erst gegen Ende des 18. Jahrh. erlosch, haben wir 1) Klärung des Begriffs Kontakt (Osculation, Peletarius sagt „curvas se lambere“, sie lecken sich, Berührung). 2) Erkenntnis, dafs die Kurve in jedem einfachen Punkt die Richtung ihrer Tangente hat. 3) Dafs ein krummliniger Winkel durch den der Tangenten im Scheitel zu ersetzen sei. 4) Kontingenzwinkel als Mafs für die Richtungsänderung in jedem Punkt. 5) Die Einführung des Mafses für die Krümmung; wodurch dieser früher vage Begriff der Rechnung zugänglich gemacht wurde.

Übrigens hat Tacquet (ebenfalls von der Gesellschaft Jesu) ausgesprochen, dafs Peletarius und Clavius alle beide recht (und unrecht) hätten. Die Litteratur findet sich vollständig bei Pfleiderer, Scholien, T. 2, ad III, S. 71—74 und bei Camerer (E. Elem. libri sex T. I 1824 p. 475—482); vgl. auch Klügel's Lexicon, Art. Berührungswinkel und M. Cantor's Vorles., B. 2, 1900.

17.

Von einem gegebenen Punkt aus an einen gegebenen Kreis eine Tangente zu ziehen.

Fig. 17.

(Fig. 17.) A der gegebene Punkt, $B\Gamma\Delta$ der gegebene Kreis. Man nehme das Zentrum E (Satz 1) und ziehe AE, beschreibe um E mit dem Abstand EA den Kreis AZH und von Δ aus werde ΔZ senkrecht gezogen und EZ und AB, so behaupte ich, dafs vom Punkt A die den Kreis berührende AB gezogen ist.

Beweis 1, 4. Die zweite Tangente wird nicht erwähnt, ebensowenig der Spezialfall, in dem A auf dem Kreis liegt. Die Konstruktion des Euclid ist unmittelbar einleuchtend, sie bleibt auch für den Grenzkreis der Nicht-Euclidischen Geometrie bestehen. Sie kostete aber, bis der Peripheriewinkel im Halbkreis verwertet wurde zur Konstruktion eines Lotes mit einem Kreise, 4 Kreise. Daher galt die Konstruktion des Clavius (Scholium zu S. 31), welche direkt den Peripheriewinkel im Halbkreis benutzt, und nur 3 Kreise, ja unter Umständen nur 2 Kreise, kostet, für einen Fortschritt, er hat die des Euclid völlig, bis zur gänzlichen Vergessenheit (im deutschen mathematischen Unterricht) verdrängt.

Die einfachste Konstruktion, welche den Gegenpunkt zum Zentrum in Bezug auf die Tangente konstruiert und nur 2 Kreise kostet, gab Verfasser vor einigen Jahren (Crelle).

Die Aufgabe, eine Tangente von gegebener Richtung zu ziehen, findet sich im Euclid des Peletarius, und die so wichtige Aufgabe, an zwei Kreise die gemeinsame Tangente zu ziehen, ist vollständig von Cardanus gelöst.

18.

Wenn eine Gerade den Kreis berührt und vom Zentrum bis an den Berührungspunkt eine Verbindungsgerade gezogen wird, so steht diese Verbindunglinie auf der berührenden senkrecht.

(Fig. 18.) Beweis indirekt.

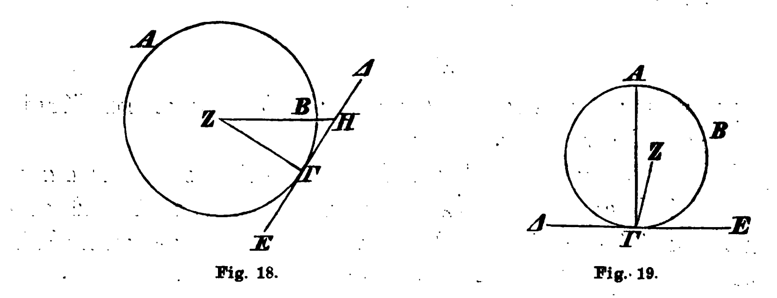


Fig. 18. Fig. 19.

19.

Wenn eine Gerade den Kreis berührt und von dem Berührungspunkt zur Berührenden die Senkrechte gezogen wird, so wird auf ihr das Zentrum des Kreises liegen.

(Fig. 19.) Beweis indirekt.

Von diesem Satz aus ist der term. techn. „Tangente“ als Übersetzung von ἡ ἐφαπτομένη ausgegangen, er findet sich bei Zamberti, aber nicht bei Campanus.

20.

Im Kreis ist der Winkel am Zentrum das Doppelte des Winkels an der Peripherie, wenn die Winkel denselben Bogen* zur Basis haben.

(Fig. 20.) Beweis durch I, 5 und I, 32, es werden die beiden Fälle unterschieden, in denen das Zentrum innerhalb oder aufserhalb des Peripheriewinkels liegt, der dritte als selbstverständlich übergangen. Für „Bogen" steht natürlich im Text „περιφέρεια".

21.

Im Kreis sind die Winkel im selben Segment einander gleich.

(Fig. 21.) Satz 21 ist unmittelbare Folge (Porisma) von 20.

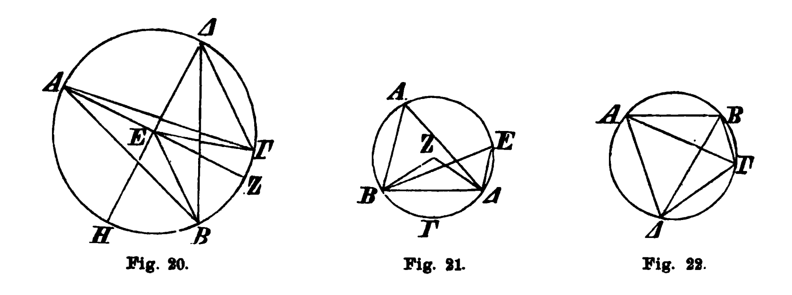


Fig. 20. Fig. 21. Fig. 22.

22.

Die gegenüberliegenden Winkel der Vierecke im Kreis sind [zusammen] zwei Rechten gleich.

(Fig. 22.) Die drei Winkel des Dreiecks $AB\Gamma$ sind zusammen gleich 2 Rechten und $BA\Gamma$ gleich $B\Delta\Gamma$ nach 21 und desgleichen $B\Gamma A = B\Delta A$. Es wird damit der allgemeinere Satz bewiesen, dafs $\beta + \delta = \alpha + \gamma$ ist.

23.

Auf derselben Strecke können nicht zwei ähnliche (und ungleiche) Segmente an derselben Seite konstruiert werden.

Fig. 23.

(Fig. 23.) Beweis indirekt. Nach Definition 11 müfste $A\Gamma B$ gleich $A\Delta B$ sein, den es als Aufsenwinkel übertrifft. (Die geklammerten Worte würden besser weggelassen worden sein.)

24.

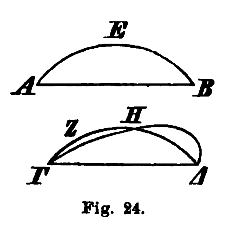


Fig. 24.

Ähnliche Segmente auf gleichen Strecken sind einander gleich.

(Fig. 24.) Legt man AEB auf $\Gamma Z\Delta$, so bleibt nach 23, aufser der Kongruenz, nur die Lage, welche die Figur darstellt, und diese ist ausgeschlossen durch Satz 10. Es wird beim Beweis dieses Satzes wie bei dem der Kongruenzsätze I, 4 und I, 8 nicht sowohl die Bewegung benutzt als das Axiom von der Gleichförmigkeit des Raumes.

25.

Wenn ein Segment gegeben ist, den Kreis daran zu beschreiben, von dem es ein Segment ist.

(Fig. 25a.) $AB\Gamma$ das Segment, $A\Gamma$ halbiert in Δ, und in Δ das Lot auf $A\Gamma$ errichtet, welches den Kreis in B schneidet, B mit A verbunden, so ist ΔBA entweder gröfser, oder gleich oder kleiner als $BA\Delta$.

Fall 1). Man lege in A an BA den Winkel $BAE = AB\Delta$ und verlängere $B\Delta$ bis E und ziehe $E\Gamma$, so ist der um E mit EA

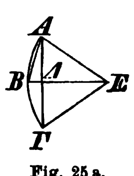


Fig. 25 a.

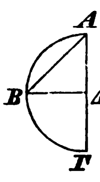


Fig. 25 b.

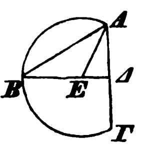


Fig. 25 c.

bezw. EB bezw. $E\Gamma$ beschriebene Kreis (Forderung 3) der verlangte; zugleich erhellt, dafs $AB\Gamma$ kleiner als ein Halbkreis, weil das Zentrum E aufserhalb desselben.

Fall 2). $A\Delta = \Delta B = \Delta\Gamma$, also Δ das Zentrum, das Segment „offenbar" ein Halbkreis. (Fig. 25b.)

Fall 3). (Fig. 25c.) Dieselbe Konstruktion, das Zentrum E fällt auf $B\Delta$ innerhalb des Segments $AB\Gamma$ und dies ist also offenbar gröfser als ein Halbkreis.

Die drei gesperrten Worte zeigen wieder den Anteil der Anschauung an diesen Beweisen.

26.

In gleichen Kreisen stehen gleiche Winkel auf gleichen Bogen, sei es, dafs sie am Zentrum, sei es, dafs sie an der Peripherie liegen.

(Fig. 26.) Satz 24.

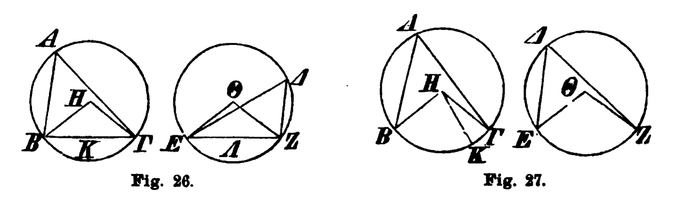


Fig. 26. Fig. 27.

27.

In gleichen Kreisen sind Winkel, welche auf gleichen Bogen stehen, ob am Zentrum oder an der Peripherie, gleich.

(Fig. 27.) Beweis indirekt durch Satz 26.

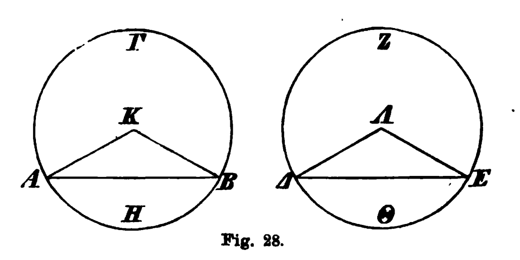


Fig. 28.

28.

In gleichen Kreisen schneiden gleiche Sehnen gleiche Bogen ab, [so dafs] der gröfsere dem gröfseren, der kleinere dem kleineren [gleicher ist].

(Fig. 28.) I, 8.

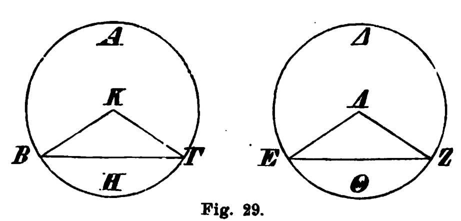


Fig. 29.

29.

In gleichen Kreisen unterspannen gleiche Sehnen gleiche Bogen.

(Fig. 29.) I, 4.

30.

Einen gegebenen Bogen zu halbieren.

(Fig. 30.) $A\Delta = \Delta B$ nach I, 4 und die Bogen $A\Delta$ und ΔB kleiner als der Halbkreis, weil nach Satz 1, Zusatz, das Zentrum auf $\Delta\Gamma$, somit aufserhalb der Segmente liegt.

Fig. 30.

31.

Im Kreise ist der Winkel im Halbkreis ein Rechter, der im gröfseren Abschnitt kleiner als der rechte, der im kleineren Abschnitt gröfser als der rechte. Und dazu ist der Winkel des gröfseren Abschnitts gröfser als der rechte, der Winkel des kleineren Abschnitts kleiner als der rechte.

(Fig. 31.) $AB\Gamma\Delta$ der Kreis, $BA\Gamma = ZA\Gamma$, weil beide gleich $A\Gamma B + AB\Gamma$; also $BA\Gamma$ ein Rechter und $A\Gamma B <$ als der Rechte, und nach Satz 22 $A\Delta\Gamma >$ als ein Rechter.

Der Winkel zwischen $A\Gamma$ und dem Bogen $AB\Gamma >$ als der Rechte $BA\Gamma$ und der zwischen $A\Gamma$ und dem Bogen $A\Delta\Gamma$ kleiner als der Rechte $ZA\Gamma$.

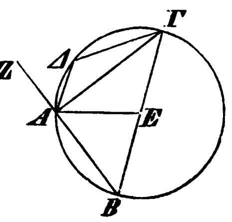


Fig. 31.

Über den letzten Teil des Satzes vgl. die Note zu Satz 16. Bei Clavius findet sich die Anwendung nicht nur zur Konstruktion der Tangente, sondern auch als Zusatz zu I, 11 die bekannte Aufgabe: im Endpunkt einer Strecke, welche nicht über ihn hinaus verlängert werden darf, mit Einem Kreise das Lot zu errichten.

32.

Wenn eine Gerade den Kreis berührt, und von der Berührungsstelle in den Kreis hinein irgend eine den Kreis schneidende Gerade gezogen wird, so werden die Winkel, welche diese mit der Tangente bildet, den Winkeln in den entgegengesetzten Kreisabschnitten gleich sein.

Fig. 32.

(Fig. 32.) $BA\Delta = \Delta BZ$, weil beide $AB\Delta$ zu einem Rechten ergänzen, $\Delta\Gamma B = EB\Delta$ (Satz 22).

33.

Auf einer gegebenen Geraden einen Kreisabschnitt zu zeichnen, der einen Winkel fafst, welcher einem gegebenen (geradlinigen) Winkel gleich ist.

(Fig. 33a.) Der gegebene $\sphericalangle\, \Gamma$ sei spitz, BA die Gerade, ΔAB wird gleich Γ gemacht (I, 23), AE senkrecht zu $A\Delta$ und zu AB die

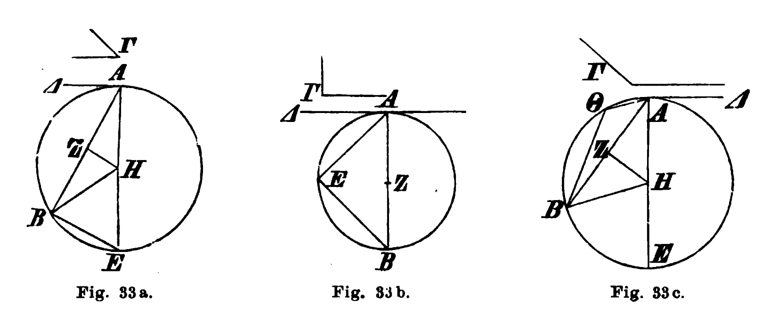


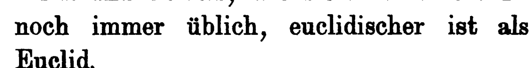
Fig. 33a. Fig. 33b. Fig. 33c.

Mittelsenkrechte ZH gezogen und HB; der Kreis um H mit HA geschlagen, so ist AEB das gesuchte Segment.

(Fig. 33b.) Γ ein Rechter, der Halbkreis über AB.

(Fig. 33c.) Γ stumpf; die Konstruktion bleibt wie im Fall a, $B\Theta A$ ist das gesuchte Segment.

Die Aufgabe bildet ein klassisches Beispiel, dafs die pedantische Scheidung zwischen Konstruktion und Beweis, wie sie in Deutschland


noch immer üblich, euclidischer ist als Euclid.

34.

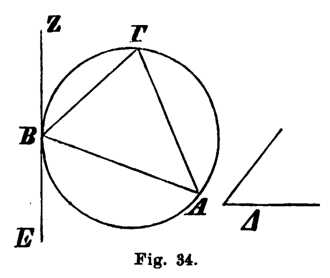


Fig. 34.

Von einem gegebenen Kreis ein Segment wegzunehmen, das einen gegebenen Winkel fafst.

(Fig. 34.) $\sphericalangle\, \Delta$ gegeben, gleich $ZB\Gamma$ gemacht, so ist $BA\Gamma$ das wegzunehmende Segment.

Die Konstruktion der Tangente ist überflüssig.

35.

Wenn sich zwei Geraden innerhalb des Kreises schneiden, so ist das Rechteck aus den Abschnitten der einen gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der andern.

Wenn (Fig. 35a) beide Geraden sich im Zentrum schneiden, ist der Satz selbstverständlich, wenn (Fig. 35b) $A\Gamma$ und $B\Delta$ nicht durch das Zentrum Z gehen und ZH, $Z\Theta$ die Senkrechten auf $A\Gamma$ und $B\Delta$

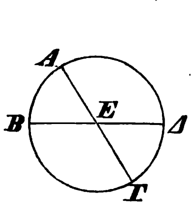


Fig. 35a.

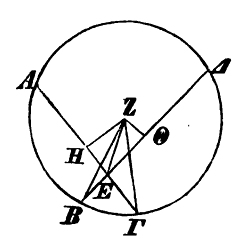


Fig. 35b.

sind, und EZ und BZ und ΓZ gezogen werden, so ist, da $A\Gamma$ in H halbiert wird (Satz 3), nach II, 5

$$AE \cdot E\Gamma + HE^2 = H\Gamma^2,$$

also wenn auf beiden Seiten HZ^2 addiert wird

$$AE \cdot E\Gamma + HE^2 + HZ^2 = H\Gamma^2 + HZ^2,$$

also nach I, 47

$$AE \cdot E\Gamma + ZE^2 = Z\Gamma^2,$$

ebenso

$$\Delta E \cdot EB + ZE^2 = ZB^2$$

somit

$$AE \cdot E\Gamma = \Delta E \cdot EB.$$

36.

Wird aufserhalb des Kreises ein Punkt genommen und gehen von ihm an den Kreis zwei Gerade, deren eine den Kreis schneidet, während die andere berührt, so wird das Rechteck aus der ganzen schneidenden und ihrem äufseren Abschnitt dem Quadrate der berührenden* gleich sein.

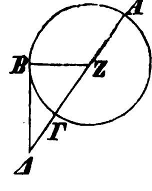


Fig. 36a.

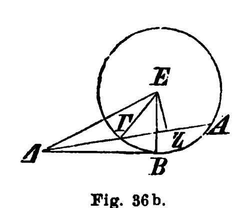


Fig. 36b.

(Fig. 36a.) Die Sekante geht durch das Zentrum, da $A\Gamma$ in Z halbiert ist und $\Gamma\Delta$ hinzugefügt ist, so ist nach II, 6

$$A\Delta \cdot \Delta\Gamma + Z\Gamma^2 = Z\Delta^2; \quad Z\Gamma = ZB; \quad Z\Delta^2 = ZB^2 + B\Delta^2,$$

also $\quad A\Delta \cdot \Delta\Gamma + ZB^2 = ZB^2 + B\Delta^2, \quad$ also $A\Delta \cdot \Delta\Gamma = \Delta B^2$.

NB. Hier findet sich nicht bei Campanus, sondern bei Zamberti wieder der Ausdruck tangens.

Die beiden Sätze 35 und 36 sind Spezialfälle des grofsen Hauptsatzes der Kreislehre, den wir heute nach Steiner den Potenzsatz nennen. Dafs die Umkehr fehlt, darf nicht befremden, ebensowenig wie, dafs die Erweiterung von 35 auf den Fall, wo sich die Sehnen aufserhalb schneiden, fehlt, sie werden eben dem jetzt schon geübteren Schüler überlassen.

37.

Gehen von einem Punkt aufserhalb des Kreises an den Kreis zwei Geraden, deren eine ihn schneidet, während die andere [nur] herangeht, und das [Rechteck] aus der ganzen schneidenden und ihrem äufseren Abschnitt ist gleich dem [Quadrat] der herangehenden, so wird diese den Kreis berühren.

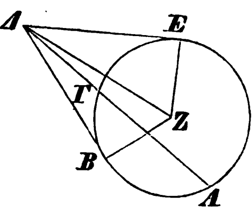


Fig. 37.

(Fig. 37.) $\varDelta\Gamma A$ die schneidende, $\varDelta B$ die herangehende, $\varDelta E$ Tangente nach Konstruktion, $\varDelta BZ \cong \varDelta EZ$ durch 1, 8.

Der ausdrückliche Beweis der Umkehr von 36 ist mit Rücksicht auf die Wichtigkeit für die Konstrukrion des regulären Fünf- bezw. Zehnecks gegeben. Wie denn das ganze folgende Buch dem Problem der Kreisteilung gewidmet ist.

IV. [Buch.]

Definitionen.

1) Eine geradlinige Figur heifst in eine geradlinige Figur eingeschrieben, wenn die einzelnen[1]) Ecken der eingeschriebenen Figur auf den einzelnen Seiten der in die sie eingeschrieben ist, liegen.[2])

2) Gleicherweise heifst eine Figur um eine Figur geschrieben, wenn die einzelnen Seiten der, umgeschriebenen durch die einzelnen Ecken der, um welche sie geschrieben ist, gehen.[3])

3) Eine geradlinige Figur ist in den Kreis geschrieben, wenn die einzelnen Ecken der eingeschriebenen in die Peripherie des Kreises fallen.[4])

4) Eine geradlinige Figur ist um den Kreis geschrieben, wenn die einzelnen Seiten der umgeschriebenen die Peripherie des Kreises berühren.[5])

5) Gleicherweise aber sagt man, der Kreis sei in eine Figur eingeschrieben, wenn die Peripherie der Kreise jede der Seiten der [Figur], in der er eingeschrieben ist, berührt.

6) Der Kreis heifst aber um eine Figur geschrieben, wenn die Peripherie des Kreises jede Ecke der [Figur], um die er geschrieben ist, fafst.

7) Eine Strecke[6]) heifst in den Kreis eingetragen[7]), wenn die Endpunkte der Strecke in die Peripherie des Kreises fallen.

Anmerkungen.

1) griech. *ἑκάστη* „eine Jede“. 2) *ἅπτηται* „fafst“. 3) wie 2). 4) wie 2). 5) ausdrücklich griech. *ἐφάπτηται*. 6) griech. nur *εὐθεῖα*. 7) *ἐναρμόζεσθαι* „eingefügt werden“.

1. [Aufgabe.]

In einen *gegebenen Kreis eine *Strecke einzutragen, welche gleich einer nicht gröſser als der Durchmesser des Kreises gegebenen Strecke ist.

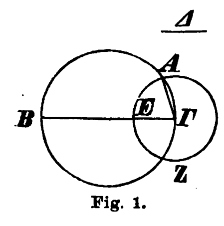


Fig. 1.

(Fig. 1.) Sei $AB\Gamma$ der gegebene Kreis, Δ die Strecke. Man ziehe den Durchmesser $B\Gamma$, wenn $B\Gamma = \Delta$, ist die Aufgabe gelöst; wenn $B\Gamma > \Delta$, mache man $\Gamma E = \Delta$ und beschreibe um Γ als Zentrum mit ΓE als Radius den Kreis $E A Z$ und ziehe ΓA, so ist $\Gamma A = \Delta$.



2.

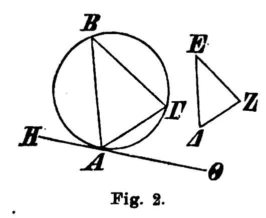


Fig. 2.

In einem* gegebenen Kreis das einem* gegebenen Dreieck gleichwinklige Dreieck einzuschreiben.

(Fig. 2.) $AB\Gamma$ der Kreis, ΔEZ das Dreieck. Man ziehe irgend eine Tangente $HA\Theta$ und lege in A an $A\Theta$ einen dem Winkel ΔEZ gleichen, $\Theta A \Gamma$, und in A an AH einen dem Winkel ΔZE gleichen: HAB, und ziehe $B\Gamma$, so ist $AB\Gamma$ das verlangte Dreieck (III, 32).

3.

Um einen* gegebenen Kreis das* einem* gegebenen Dreieck gleichwinklige Dreieck zu beschreiben.

(Fig. 3.) Die Konstruktion ist aus der Figur ersichtlich, KB ist beliebig, $\sphericalangle\, BK\Gamma = \Delta Z\Theta$; $BKA = \Delta EH$.

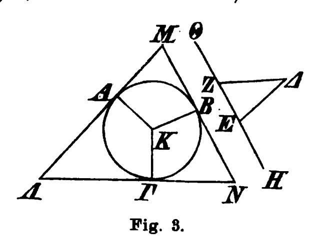


Fig. 3.

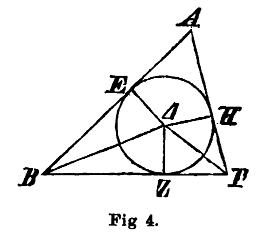


Fig 4.

4.

In ein* gegebenes Dreieck den *Kreis einzuschreiben.

(Fig. 4.) Man halbiert $\sphericalangle\, \beta$ und $\sphericalangle\, \gamma$ (I, 9), die Halbierungslinien

* Die Sterne beim Artikel machen auf den oft hervorgehobenen Unterschied aufmerksam, wo wir den unbestimmten Artikel brauchen, setzt Euclid den bestimmten [demonstrativ] und wo wir den bestimmten, fehlt bei Euclid meist der Artikel.

schneiden sich (I, 5. Forderung) in Δ, und fällt von Δ auf die Seiten die Lote ΔE, ΔZ, ΔH, so sind diese gleich (I, 26) und der Kreis EZH ist der verlangte, da nach III, 16 die Seiten ihn berühren.

Aus der Konstruktion folgt, dafs Euclid als bekannt voraussetzt: 1) dafs sich von jedem Punkt aufserhalb zwei Tangenten an den Kreis ziehen lassen; 2) dafs diese gleich lang sind und 3), dafs sie symmetrisch zur Verbindung zwischen Punkt und Zentrum liegen; anders ausgedrückt, er setzt den Satz voraus: Die Halbierungslinie ist der Ort der Punkte, die von den Schenkeln gleichen Abstand haben. Er weifs auch, dafs die drei Winkelhalbierenden sich in einem Punkt schneiden (das Fehlen des Artikels).

5.

Um ein *gegebenes Dreieck den *Kreis zu beschreiben.

(Fig. 5, a, b, c.) Und es erhellt, dafs, wenn das Zentrum des Kreises innerhalb des Dreiecks fällt, der Winkel $BA\Gamma$, als in ein

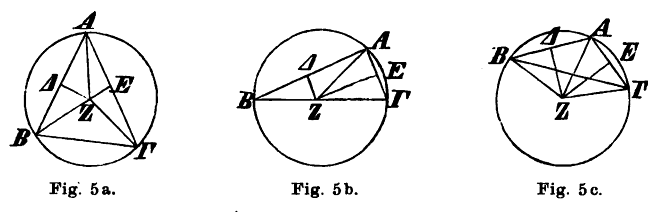


Fig. 5a. Fig. 5b. Fig. 5c.

Segment gröfser als der Halbkreis fallend, kleiner als ein rechter ist, wenn auf $B\Gamma$, gleich einem Rechten, wenn aufserhalb des Dreiecks, gröfser als ein Rechter (III, 31).

Aus dem Fehlen des Artikels vor κύκλον geht hervor, dafs Euclid weifs, dafs die drei Mittelsenkrechten sich in einem Punkt treffen. Die Umkehr des Zusatzes von „und es erhellt“ hat Heiberg mit Recht fortgelassen, ganz abgesehen von philologischen Gründen ist es eine konstante Gewohnheit bei Euclid, Umkehrungen, die nur die Anwendung des Drobisch-Möbius'schen Prinzips erfordern, zu übergehen.

6.

In einen gegebenen Kreis das *Quadrat einzuschreiben.

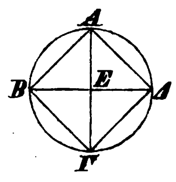


Fig. 6.

(Fig. 6.) Seiten gleich nach I, 4; die Winkel rechte nach III, 31. *Das Fehlen des Artikels vor τετράγωνον vertritt den Satz: Die Quadrate in denselben Kreis sind kongruent, also Eindeutigkeit wie 4 und 5, 7, 8, 9.

7.

Um einen gegebenen Kreis das *Quadrat zu beschreiben.

(Fig. 7.) Durch die Enden der beiden aufeinander senkrechten Durchmesser werden die Tangenten gezogen.

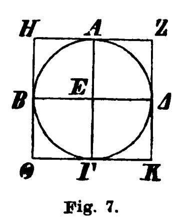


Fig. 7.

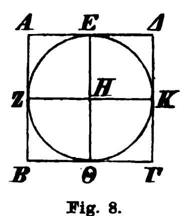


Fig. 8.

8.

In ein gegebenes Quadrat den *Kreis zu beschreiben.

(Fig. 8.) Durch die Mitten E und Z von $A\Delta$ und AB werden die Parallelen zu AB ($\Delta\Gamma$) und $A\Delta$ ($B\Gamma$) gezogen; I, 34, III, 16.

9.

Um ein gegebenes Quadrat den *Kreis zu beschreiben (Fig. 9).

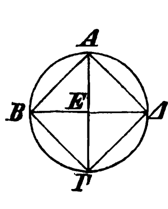


Fig. 9.

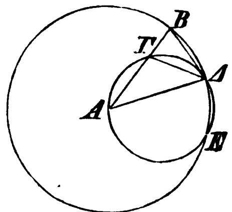


Fig. 10.

10.

Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, in welchem jeder Basiswinkel doppelt so grofs als der übrige ist.

(Fig. 10.) Es liege irgend eine Strecke AB vor und sie werde in Γ so zerschnitten, dafs das Rechteck aus AB und $B\Gamma$ gleich ist dem Quadrat von $A\Gamma$ (II, 11, goldene Schnitt) und um A als Zentrum und AB Radius werde der Kreis $B\Delta E$ beschrieben und in den Kreis $B\Delta E$ werde die Strecke $B\Delta$ eingetragen, die gleich $A\Gamma$, welche nicht gröfser ist als der Durchmesser des Kreises (Satz 1) und $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ gezogen, und um Dreieck $A\Gamma\Delta$ der Kreis $A\Gamma\Delta$ beschrieben (Satz 9).

Weil nun $AB \cdot B\Gamma = A\Gamma^2$ und $A\Gamma = B\Delta$, ist $AB \cdot B\Gamma = B\Delta^2$. Da nun ein Punkt aufserhalb des Kreises $A\Gamma\Delta$ genommen ist, nämlich B und von ihm an den Kreis zwei Geraden BA, $B\Delta$ gezogen

sind und die eine ihn schneidet und die andere an ihn herangeht und $AB \cdot B\Gamma = B\Delta^2$, so berührt $B\Delta$ den Kreis $A\Gamma\Delta$ (III, 37). Weil nun $B\Delta$ berührt und vom Berührungspunkt*) Δ gezogen ist $\Delta\Gamma$, ist $\sphericalangle B\Delta\Gamma = \Delta A\Gamma$ im entgegengesetzten Kreisabschnitt (III, 32). Da nun $B\Delta\Gamma = \Delta A\Gamma$, füge man zu beiden $\sphericalangle \Gamma\Delta A$ hinzu; wohlan, so ist der ganze Winkel $B\Delta A = \Gamma\Delta A + \Delta A\Gamma$. Aber $\Gamma\Delta A + \Delta A\Gamma$ ist gleich dem Aufsenwinkel $B\Gamma\Delta$, also auch

$$B\Delta A = B\Gamma\Delta;$$

aber $B\Delta A = \Gamma B\Delta$, weil $A\Delta = AB$, also auch $\sphericalangle \Delta BA = B\Gamma\Delta$. Folglich sind die drei Winkel, $B\Delta A$, ΔBA, $B\Gamma\Delta$ unter sich gleich.

Weil $\sphericalangle \Delta B\Gamma$ gleich $B\Gamma\Delta$, ist Seite $B\Delta = \Delta\Gamma$; aber $B\Delta$ ist ΓA gleich gemacht worden, also auch $\Gamma A = \Gamma\Delta$; folglich auch Winkel $\Gamma\Delta A = \sphericalangle \Delta A\Gamma$; also

$$\Gamma\Delta A + \Delta A\Gamma = 2\ \Delta A\Gamma.$$

Aber $B\Gamma\Delta$ (war) gleich $\Gamma\Delta A + \Delta A\Gamma$, somit

$$B\Gamma\Delta = 2\ \Delta A\Gamma.$$

Aber $B\Gamma\Delta = B\Delta A = \Delta BA$; also jeder der Winkel $B\Delta A$, ΔBA doppelt so grofs als der Winkel ΔAB.

Also ist das gleichschenklige Dreieck $AB\Delta$ konstruiert, in dem jeder Winkel an der Basis $B\Delta$ doppelt so grofs als der übrige; . . . . was gethan werden sollte.

11.

In einem gegebenen Kreis das sowohl gleichseitige als gleichwinklige Fünfeck einzuschreiben.

(Fig. 11.) Der Kreis sei $AB\Gamma\Delta E$. Man konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck $ZH\Theta$ wie in 10; so dafs jeder der Winkel bei H und Θ doppelt so grofs als der bei Z ist, und schreibe in dem Kreis das $ZH\Theta$ gleichwinklige Dreieck $\Gamma A\Delta$ ein (Satz 2), so dafs $\sphericalangle \Gamma A\Delta$ gleich dem Winkel bei Z ist; halbiere $A\Delta\Gamma$ durch $B\Delta$ und $A\Gamma\Delta$ durch ΓE, so ist $AB\Gamma\Delta E$ das verlangte Fünfeck.

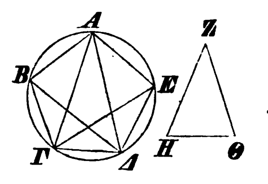


Fig. 11.

Denn zunächst ist es gleichseitig, da die fünf Winkel über den Sehnen nach Konstr. gleich sind, und damit auch die Bogen und die Sehnen, und gleichwinklig, weil die Winkel BAE, $AE\Delta$ etc. auf gleichen Bogen stehen.

---

*) Eigentlich „Berührung bei Δ“.

12.

Um einen gegebenen Kreis das gleichseitig gleichwinklige Fünfeck umzuschreiben.

(Fig. 12.) Denken wir A, B, Γ, Δ, E seien die Ecken des eingeschriebenen Fünfecks, so dafs die Bogen AE, $E\Delta$ etc. gleich sind, und durch A, B, Γ, Δ, E sollen die Tangenten des Kreises $H\Theta$, ΘK, $K\Lambda$, ΛM, MH gezogen werden, so ist $H\Theta K\Lambda M$ das verlangte.

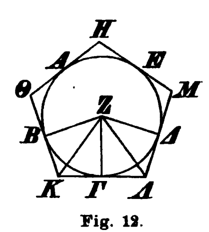


Fig. 12.

Zum Beweis werden die Radien ZB, $Z\Gamma$, $Z\Delta$ gezogen und die Kongruenz der Dreiecke BKZ, ΓKZ mittelst des Pythagoras (und nicht des 4. Kongruenzsatzes, der bei Euclid fehlt) und dann die von $Z\Gamma K$ und $Z\Gamma\Lambda$ (nach I, 26 dem sogen. 2. Kongruenzsatz) bewiesen.

13.

In ein gegebenes Fünfeck, das sowohl gleichseitig als gleichwinklig ist, den Kreis einzuschreiben.

(Fig. 13.) Man halbiert $B\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta E$, welche sich in Z schneiden, der Kreis um Z mit ZK ist der verlangte. Beweis: I, 4 giebt $BZ = Z\Delta$, und $\sphericalangle\, \Gamma BZ = Z\Delta\Gamma$, also BZ Halbierungslinie von ΓBA [und $ZB = Z\Gamma = Z\Delta = ZE = ZA$], ebenso wird gezeigt, dafs AZ, EZ die Winkel des Fünfecks bei A und E halbieren; dann folgt nach I, 26 die Gleichheit der Lote ZK, $Z\Lambda$ etc. Da die Seitenzahl beim Beweis nicht benutzt wird, so ist somit die Aufgabe, wie das Porisma zu 15 betont, allgemein gelöst für jedes reguläre n-eck.

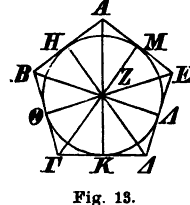


Fig. 13.

14.

Um ein gegebenes Fünfeck, das sowohl gleichseitig als gleichwinklig ist, den Kreis zu beschreiben.

(Fig. 14.) Man halbiere $B\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta E$ durch $Z\Gamma$ und $Z\Delta$ und ziehe ZB, ZA, ZE, so sind, wie in 13 bewiesen, diese 5 Strecken gleich, und der Kreis um Z mit diesem Radius der verlangte.

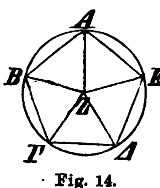


Fig. 14.

Satz 13 und 14 sind hübsche Beispiele, wie wenig euclidisch die moderne pedantische Scheidung zwischen Konstruktion und Beweis ist.

15.

In einen gegebenen Kreis das gleichseitig gleichwinklige Sechseck einzuschreiben.

(Fig. 15.) $AB\Gamma\Delta EZ$ sei der Kreis: „Ziehe seinen Durchmesser $A\Delta$; nimm das Zentrum H und beschreibe um das Zentrum Δ mit dem Radius ΔH den Kreis $EH\Gamma\Theta$, und führe die Verbindungslinien EH, ΓH durch bis zu den Punkten B, Z, verbinde A [mit] B, B [mit] Γ, Γ [mit] Δ, Δ [mit] E, EZ, ZA, so ist $AB\Gamma\Delta EZ$ das gleichseitig gleichwinklige Sechseck.“

Fig. 15.

Zusatz.

Hieraus erhellt, dafs die Seite des Sechsecks gleich ist dem Radius* des Kreises.

Ebenso wie beim Fünfeck wird das gleichseitig gleichwinklige Sechseck um den Kreis beschrieben, wenn wir durch die Teilpunkte im Kreise die Tangenten des Kreises ziehen gemäfs dem beim Fünfeck gesagten. Und aufserdem wird durch dem beim Fünfeck gesagten Analogem in ein gegebenes Sechseck der Kreis einbeschrieben und umgeschrieben. Was gethan werden sollte.

16.

In einen gegebenen Kreis ein gleichseitig gleichwinkliges Fünfzehneck einzuschreiben.

(Fig. 16.) Der gegebene Kreis sei $AB\Gamma\Delta$, es werde in den Kreis einbeschrieben die Seite $A\Gamma$ eines eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks und AB die Seite des regelmäfsigen Fünfecks. Daher, wenn $AB\Gamma\Delta$ in 15 gleiche Teile geteilt ist, so enthält Bogen $AB\Gamma$ als dritter Teil des Kreises 5 solcher Teile, daher ist der Rest $B\Gamma$ gleich zweien. $B\Gamma$ werde in E halbiert, so ist jeder von beiden Bogen BE, $E\Gamma$ der 15. Teil des Kreises. Wenn wir also fort-

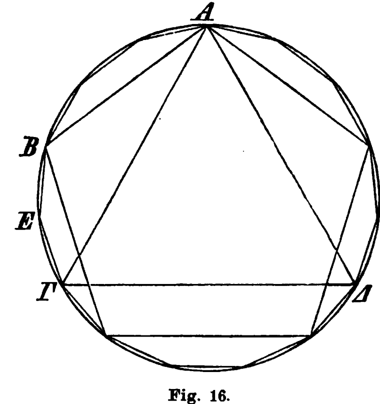


Fig. 16.

gesetzt den Sehnen *BE*, *EΓ* gleiche Sehnen in den Kreis eintragen, wird in ihm das regelmäfsige Fünfzehneck eingeschrieben.

Ebenso wie beim Fünfeck wird das regelmäfsige Fünfzehneck um den Kreis beschrieben, wenn wir durch die Teilpunkte des Kreises die Tangenten an den Kreis ziehen. Und durch den beim Fünfeck gleichartige Darlegungen wird einem gegebenen Fünfzehneck der Kreis ein- und umgeschrieben. Was gemacht werden sollte.

Hier ist sogar die „Analyse" in die Konstruktion verwebt!

Eine Fortsetzung der Sätze des IV. Buches findet sich im Anfange des XII. Buches:

S. 1. Ähnliche in Kreisen beschriebene Vielecke verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser.

S. 2. Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser. — S. 16 Aufg.: Wenn zwei konzentrische Kreise gegeben sind, in den gröfseren ein gleichseitiges Vieleck von gerader Seitenzahl so einzuschreiben, dafs es den kleineren Kreis nicht trifft.

S. 2 ist alles, was über „die Quadratur des Zirkels" bei Euclid vorkommt.

V. [Buch].

Erklärungen.

1) Eine kleinere Gröſse ist Teil[1]) einer gröſseren, falls sie die gröſsere abmiſst.

2) Die gröſsere aber ein Vielfaches der kleineren, falls sie von der kleineren abgemessen wird.

3) Verhältnis zweier gleichartiger[2]) Gröſsen ist die Art und Weise, wie sie sich auf die Frage wie groſs verhalten.[3])

4) Man sagt, daſs Gröſsen zu einander ein bestimmtes Verhältnis haben, wenn bei der Vervielfältigung die eine die andere übertrifft.[4])

5) Man sagt: Gröſsen sind zu einander in gleichem Verhältnis, die erste zur zweiten und die dritte zur vierten, wenn gleiche Vielfache der ersten und dritten gleiche Vielfache der zweiten und vierten — beiderseits in Bezug auf jedes beliebige Vielfache — entweder zugleich übertreffen, oder [zugleich ihnen] gleich sind, oder [jene zugleich] kleiner sind [als diese], [die Gröſsen] entsprechend genommen.[5])

6)[6]) Gröſsen, welche dasselbe Verhältnis haben, sollen „in Proportion“ genannt werden.

7) Wenn von den gleichen Vielfachen [sub 5] das Vielfache des ersten das des zweiten übertrifft, dagegen das des dritten das Vielfache des vierten nicht übertrifft, dann sagt man: die erste hat zur zweiten ein gröſseres Verhältnis als die dritte zur vierten.[8])

8) Die Proportion in drei Gliedern ist die [an Gliederzahl] kleinste.[9])

9) Wenn drei Gröſsen eine Proportion bilden, so sagt man, die erste hat zur dritten das quadratische Verhältnis wie zur zweiten.[10])

10) Wenn aber vier Gröſsen in Proportion sind, so hat die erste

zur vierten das kubische Verhältnis wie zur zweiten, und so immer entsprechend weiter, wie gerade die Proportion vorliegt.[11])

11) Entsprechende[12]) Gröſsen, sagt man, sind die vorangehenden [Gröſsen] für die vorangehenden, und die folgenden für die folgenden.

12) Wechsel-Verhältnis ist die Setzung[13]): Vordere zur vorderen, wie folgende zur folgenden.

13) Umgekehrt wird das Verhältnis, wenn die vordere [Gröſse] zur folgenden und die folgende zur vorderen gemacht wird.

14) Verbindung des Verhältnisses ist das Verhältnis der Summe der vorderen und der folgenden Gröſse zur folgenden allein.[14])

15) Trennung[15]) des Verhältnisses ist das Verhältnis des Unterschieds zwischen der vorderen und der folgenden zur folgenden allein.

16) Wendung des Verhältnisses ist das Verhältnis des vorderen zum Unterschied zwischen der vorderen und der folgenden Gröſse.

17) Ist eine erste Gröſsenreihe gegeben und eine zweite von gleicher Giiederzahl, so daſs je zwei herausgegriffen in gleichem Verhältnis stehen, so giebt es ein Verhältnis infolge Gleichheit, wenn das erste Glied der ersten Reihe zum letzten, wie das erste Glied der zweiten Reihe zum letzten [sich verhält], oder anders: [es ist dies] die Bindung[16]) der extremen [Glieder] [zu einer Proportion] mit Auslassung der mittleren [Glieder].[17])

18) Eine Proportion heiſst verworren, wenn, falls drei Gröſsen gegeben sind und eine zweite Reihe von drei Gröſsen, es eintreten konnte, daſs in der ersten Reihe ein führendes zum folgenden sich verhält, wie in der zweiten Reihe ein führendes zum folgenden, und zugleich in der ersten Reihe ein folgendes zu irgend einem anderen, wie in der zweiten Reihe irgend ein anderes zum führenden.[18])

Anmerkungen.

Das fünfte Buch enthält die Lehre vom Verhältnis und der Gleichung der Verhältnisse (Proportionen) gleichartiger Gröſsen in vollster Allgemeinheit. Es ist mit gröſster Wahrscheinlichkeit ein Werk des Eudoxos (vgl. Einleitung) und scheint nur wenig von Euclid überarbeitet (da wo statt „λεγεται“ steht „καλεισθω“). Auf sein höheres Alter deutet auch das Ringen mit dem Ausdruck, die oft schwer verständliche Fassung der Sätze hin. Es fehlt die Definition des Begriffs „kontinuierliche Gröſse“, sie war aber durch Aristoteles (vgl. Simon Zur

Geschichte und Philos. d. Differ.) gegeben; vermutlich auch von Eudoxos; jedenfalls konnte sie Eudoxos voraussetzen. Der bedeutendste Interpretator des Euclid in Europa, Clavius, hebt wie Campanus S. 3 hervor, dafs dem fünften Buch ein Axiom zugrunde liegt, welches Clavius (Ausgabe von 1607 S. 436) formuliert: Quam proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quaevis magnitudo proposita ad aliquam aliam, et eandem habebit quaepiam alia magnitudo ad quamvis magnitudinem propositam. Es ist das Axiom im Grunde nichts anderes als die Umkehrung des Weierstrafs'schen Axioms: Zu jedem Punkt in der Zahlenreihe giebt es eine Zahl. Es wird zwar immer behauptet, die Hellenen hätten in der Irrationalzahl keine Zahl gesehen, aber aus dem fünften Buche geht meines Erachtens unwiderleglich hervor, dafs sie den Zahlbegriff in voller, fast wirklich mit der Weierstrafs'schen Auffassung sich deckender Schärfe besafsen, und dafs Euclid wie Eudoxos im Verhältnis zweier gleichender Gröfsen nichts anderes sehen als eine Zahl. Und das erhellt schon aus dem Kunstausdruck „λόγος“ für „Verhältnis“, denn Logik ist die Rechnung, Logistik die Rechenkunst, und Logos heifst im Grunde nichts anderes als Mafszahl einer Gröfse in Bezug auf eine andere.

1) Teil hat zwei Bedeutungen, es bedeutet „genauer“ Teil (aliquoter) und auch Teil schlechtweg (aliquanter), eine Gröfse, die aus einer anderen herausgenommen werden kann. Euclid definiert nur den aliquoten Teil einer Gröfse A als Einheit, deren Vielheit A ist. Aus Definition 2) geht hervor, dafs es sich dabei um die wirkliche Anzahl handelt. Clavius verweist auf das siebente (arithmetische) Buch, wo Euclid den aliquanten Teil z. B. 4 von 7 nicht pars, sondern „partes“ nennt, weil 4 von den Siebenteln der 7 mehrere, nämlich 4 enthält.

3) Das Wort homogen, von gleicher Abstammung, ist völlig rezipiert. — Griech. „κατὰ πηλικότητα“ wörtlich „in Bezug auf die Wiegrofsigkeit“. Das Subst. ist abgeleitet vom Fragwort „πηλικός“, wie grofs, wie oft scil. ist die Einheit in dem betreffenden Objekt enthalten; vgl. für diese Auffassung Ptolemaios *Μεγάλη σύνταξις* B. I Kap. 9.

Man sieht, diese Erklärung weist deutlich auf die ursprüngliche Auffassung des Verhältnisses als Gleichheit in Bezug auf aliquote Teile hin, also auf die Kommensurabilität; sie konnte aber, nachdem an $\sqrt{2}$ bezw. an dem Verhältnis der Diagonale und Seite des Quadrats die Inkom. gefunden war, nicht mehr für die Beweise benutzt werden und

daher wird in der Definition 4) der Erweiterung des Begriffs Rechnung getragen.

4) Aus 4) geht hervor, dafs die Gröfsen, um die es sich handelt, der Gröfse nach in eine Reihe geordnet zu denken sind, so dafs von je zweien das gröfser, kleiner, gleich erkannt werden kann, d. h. aber nichts anderes, wie neuerdings sehr oft gesagt ist, dafs mit ihnen gerechnet werden könne, und dies ist das Postulat, das in 4) implicite enthalten ist.

5) Schon Zeuthen hat bemerkt, dafs diese Definition gleicher Verhältnisse wörtlich mit Weierstrafs' Definition gleicher Zahlen übereinstimme. Der Ausdruck des Satzes ist kürzer und klarer: $a:b = c:d$ wenn, falls $pa > = < qb$ ist, zugleich $pc > = < qd$ ist, wo p und q jeden beliebigen (Anzahl-) Wert haben. Heiberg hat in seiner lateinischen Übersetzung dies, was Euclid durch „καϑ' ὁποιονοῦν πολλαπλ.“ ausdrückt, übersehen, es dürfte dies wohl so ziemlich das einzige nennenswerte Versehen bilden.

Hervorgehoben mufs werden, dafs zwar a und b unter sich homogen, und c und d desgleichen unter sich sein müssen, aber a und c bezw. b und d heterogen sein können.

6) Aus dem Singular folgt schon hier, noch deutlicher aus dem sechsten Buch z. B. S. 5, dafs Euclid analogon als Adverb gebraucht, wie Lucian. Die Übersetzung „proportional“ giebt hier und oft gar keinen Sinn. Man fragt vergebens: Wer ist wem proportional? Wir sagen z. B. das Gewicht ist dem Preis proportional, weil dem doppelten dreifachen etc. Preis das doppelte, dreifache etc. Gewicht entspricht. Es mufs heifsen „in einer Verhältnisgleichung (Proportion) stehend“, oder „zu einer Verhältnisgleichung gehörig“, was allerdings im Lateinischen das Wort proportionalis auch ausdrücken kann. Die beste Übersetzung ist „dem Verhältnis nach gleich“.

7) Es wäre logischer, dafs 6) und 7) ihre Stellen tauschten, denn 7) greift auf 5) zurück, es sind dieselben Vielfachen, die da auftreten: Ist $pa > qb$, aber pc nicht $> qd$, so ist $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; hier genügt ein Wertsystem des p und q und daher fehlt „καϑ' etc.“ Es ist dieselbe Definition ungleicher Zahlen, wie bei Weierstrafs. Die Übereinstimmung ist nicht so wunderbar, Weierstrafs knüpft an Bolzano an, und dieser gehört der Epoche genauester Kenntnis des Euclid an, übrigens hatte auch Weierstrafs seinen Euclid inne.

8) 9) Gemeint ist hier

$$a : b = b : c,$$

es könnte auch dem Wortlaut nach $a : b = c : a$ gemeint sein, doch das würde auf dasselbe hinauskommen.

9) Wenn $a : b = b : c$, so ist $\frac{a}{c} = \frac{b^2}{c^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ und nicht, wie wunderlicher Weise Lorenz-Mollweide schreibt $\frac{a}{c} = 2\left(\frac{a}{b}\right)$; man sieht deutlich, wie hier einfach mit den Strecken- bezw. Gröſsenbrüchen gerechnet wird.

10) Es hätte gesagt werden müssen, daſs es sich um eine sogenannte kontinuierliche (κατὰ τὸ συνεχές) Proportion handelt

$$a : b = b : c = c : d,$$

wo dann

$$a^2c^2 = b^4;\ a^2bd = c^4;\ a : d = a^3 : b^3.$$

Beispiel einer kontinuierlichen Proportion von fünf Gröſsen 81, 54, 36, 24, 16 und $81 : 16 = (81 : 54)^4$ (Clavius) und allgemein a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, ab^4 etc. . . .

11) „Homolog", der term. techn., ist nicht das Adjektiv „ὁμόλογος" von Ὁμοῦ zugleich und λέγω sagen und bedeutet daher auch nicht übereinstimmend, entsprechend, sondern es kommt vom homerischen ὁμός ähnlich, gleich und „λόγος Verhältnis" und bedeutet also „ähnlich in Bezug auf das Verhältnis, wie analog" „dem Verhältnis gemäſs". In der Proportion $a : b = c : d$ sind a und c homolog wie b und d. Euclid unterscheidet nicht „innere" und „äuſsere" wie wir, sondern „führende" und „folgende".

12) Griech. λῆψις von λαμβάνω; in der Proportion $a : b = c : d$ sind a und c Vorderglieder und b und d folgende, es ist die Vertauschung der „inneren" Glieder gemeint, also $a : c = b : d$ statt $a : b = c : d$. Bemerkenswert ist, daſs hier die ganze Proportion (Analogie) mit „Logos" bezeichnet ist.

14) Aus $a : b$ geht man über zu $a + b : b$.

15) Der Übersetzung „Subtractio" von Διαίρεσις durch H. kann ich mich nicht anschlieſsen; Clavius sagt „divisio".

16) Übergang von $a : b$ auf $a : | a - b |$

17) Es handelt sich um zwei nach heutigem Sprachgebrauch proportionale Gröſsenreihen a_x und b_x, so daſs $a_x : b_x$ konstant.

Sind a_1 und b_1 die Anfangsglieder, u_1 und u_2 die Endglieder, so ist $a_1 : b_1 = u_1 : u_2$ die Proportion infolge Gleichheit; dieselbe setzt eine Ordnung der Reihen voraus (daher „τεταγμένη" geordnete).

18) Wenn a, b, c die Glieder der ersten, α, β, γ die der zweiten, so zeigt S. 23 daſs gemeint ist: $a : b = \beta : \gamma$ und $b : c = \alpha : \beta$.

Beispiel von Clavius 12, 8, 4; 12, 6, 4; allgemeiner: $a, b, c; z\frac{a}{c}; z\frac{a}{b}; z$. Ohne Proposition 23 wäre die Erklärung unverständlich.

[Satz] 1.

Ist eine [an Anzahl endliche] Gröfsenreihe a_x gegeben und eine zweite e_x und ist $a_x = ne_x$, wo n eine konstante Anzahl, so ist $\Sigma a_x = n\Sigma e_x$.

Fig. 1.

(Fig. 1.) AB sei a_1, $\Gamma\Delta = a_2$, $E = e_1$, $Z = e_2$, $n = 2$, $AH + \Gamma\Theta = E + Z$; $HB + \Theta\Delta = E + Z$, also $AB + \Gamma\Delta = n(E + Z)$.

Der Satz ist der heute so viel gebrauchte: Sind mehrere [Strecken-, Flächen-, etc.] Brüche einander gleich, so ist die Summe der Zähler dividiert durch die Summe der Nenner gleich jedem der Brüche. Der Beweis selbst beruht ganz und gar auf Anschauung, bezw. auf der Voraussetzung, dafs das kommutative und assoziative Gesetz für die betreffende Gröfsenreihe erwiesen ist. Für Strecken liegt das kommutative Gesetz in der Vertauschbarkeit von rechts und links. Für Flächen vgl. Simon, die Elemente der Geometrie etc. — Satz 1 findet seine Verallgemeinerung in Satz 12.

2.

Ist eine Gröfse α dasselbe Vielfache einer zweiten β, wie eine dritte γ von einer vierten δ, und ist eine fünfte ε wieder das nämliche Vielfache von β wie eine sechste ζ von δ, so ist die Summe der ersten und fünften dasselbe Vielfache der zweiten wie die Summe der dritten und sechsten von der vierten.

Fig. 2.

$\alpha = n\beta$, $\gamma = n\delta$, $\varepsilon = p\beta$, $\zeta = p\delta$, $\alpha + \varepsilon = (n + p)\beta$, $\gamma + \zeta = (n + p)\delta$.

(Fig. 2.) $AB = \alpha$, $\beta = \Gamma$, $\Delta E = \gamma$, $Z = \delta$, $BH = E$, $E\Theta = \zeta$ und $n = 3$, $p = 2$.

Beweis folgt für Strecken aus der Anschauung bezw. aus der Giltigkeit des kommutativen und assoziativen Gesetzes unmittelbar. Der Satz findet seine Verallgemeinerung in 24.

3.

Ist $A = nB$ und $\Gamma = n\Delta$ und $E = qA$ und $Z = q\Gamma$, wo sowohl n als q Anzahlen, so ist E dasselbe $[nq]$ Vielfache von B wie Z von Δ.

(Fig. 3.) $EZ = E$, $H\Theta = Z$, $n = 3$, $q = 2$.

Bemerkung wie zu 1 und 2. Vgl. Satz 22.

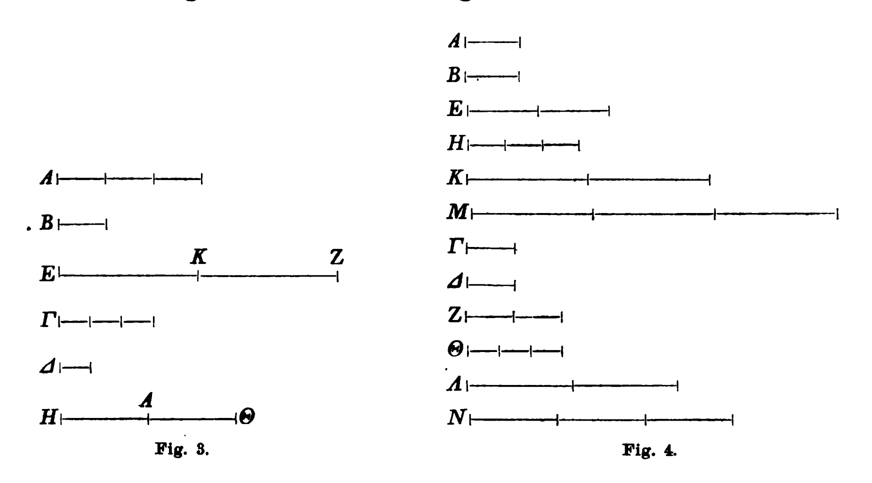


Fig. 3. Fig. 4.

4.

Wenn $A : B = \Gamma : \Delta$, so ist $nA : qB = n\Gamma : q\Delta$, wo n und q beliebige Anzahlen sind.

Es seien E und Z die nämlichen Vielfachen von A und Γ und H und Θ irgend welche Gleichvielfache von B und Δ, so wird behauptet $E : H = Z : \Theta$ (Fig. 4).

Man nehme Gleichvielfache von E und Z, sie seien K und Λ und ebenfalls von H und Θ werden beliebige Gleichvielfache M und N, dann ist nach S. 3 K dasselbe Vielfache von A wie Λ von Γ, und aus gleichem Grunde M dasselbe Vielfache von B wie N von Δ. Da nun nach Voraussetzung $A : B = \Gamma : \Delta$, so folgt aus Definition 5: Wenn $K >=< M$, so ist $\Lambda >=< N$; aber K und Λ sind gleiche Vielfache von E und Z und M wie N sind gleiche Vielfache von H, Θ also $E : H = Z : \Theta$ nach Definition 5. q. e. d.

5.

Wenn $\alpha = n\beta$ und $\gamma = n\delta$, so ist $\alpha - \gamma = n(\beta - \delta)$, wo n eine absolute Zahl.

(Fig. 5.) AB dasselbe Vielfache (3) von $\Gamma\Delta$, wie AE von ΓZ. „Man teile EB in so viel Teile, wie AE durch ΓZ geteilt wird, und dieser Teil sei $H\Gamma$“, dann ist nach S. 1 AB dasselbe Vielfache von ΓZ wie AB von HZ. Daher AB dasselbe Vielfache von HZ wie von $\Gamma\Delta$, folglich $HZ = \Gamma\Delta$, also $H\Gamma = Z\Delta$; also $(\alpha - \gamma) = n(\beta - \delta)$.

Fig. 5.

Der Beweis dieses Satzes, die Umkehrung von S. 1, giebt zu zwei Bedenken Veranlassung: 1) setzt er in der Stelle zwischen „ “ die Lösung der Teilungs-Aufgabe voraus, welche erst VI, 9 gegeben wird, 2) der Schluſs: wenn $n\alpha = n\beta$, so ist $\alpha = \beta$, ist nur gestattet, wenn für die Gröſsenart, zu der α und β gehören, das kommutative und distributive Gesetz bewiesen, so ist, vgl. Simon l. c., wenn angenommen wird, daſs die Ebene bei fortgesetzter Drehung des Strahls sich in sich selbst dreht $6 \cdot 72^0 = 6 \cdot 12^0$, aber keineswegs $\sphericalangle$ von $72^0 = \sphericalangle$ von 12^0.

Robert Simson hat, wegen des ersten Bedenkens, vgl. auch Pfleiderer, den Beweis geändert; vgl. das Postulat von Clavius (Definitionen). Ein anderer Beweis, der einwandsfrei ist, findet sich bei Clavius S. 493. Der Grundgedanke besteht darin, AB über A hinaus um $nZ\Delta$ zu verlängern, etwa bis O und dann zu zeigen (durch S. 1), daſs OA und EB gleich sind.

6.

Ist $\alpha = n\gamma$ und $\beta = n\delta$ und ist α' ein Stück von α und β' ein Stück von β und $\alpha = p\gamma$ und $\beta' = p\delta$, so ist $\alpha - \alpha' = (n - p)\gamma$ und $(\beta - \beta') = (n - p)\delta$, wo n und p Anzahlen und $n - p \geq 1$.

S. 6 ist Umkehr von S. 2 und wird durch S. 2 bewiesen (Fig. 6).

Fig. 6.

Simson (und Pfleiderer) haben die Reihenfolge der Sätze bemängelt, S. 4 gehört jedenfalls hinter 6.

7.

Gleiches hat zum Selben dasselbe Verhältnis und dasselbe hat zu Gleichem dasselbe Verhältnis.

Wenn $A = B$, so ist 1) $A : \Gamma = B : \Gamma$ und 2) $\Gamma : A = \Gamma : B$ (Fig. 7). Beweis folgt unmittelbar aus der Definition 5.

Fig. 7.

Zusatz.

Hieraus erhellt: dafs, wenn gewisse Gröfsen in Proportion sind, sie auch invers in Proportion sind.

Dieser Zusatz, obwohl er im Vaticanus hinter S. 7 steht, ist von Peyrard, da er in allen übrigen Codices hinter S. 4 steht, auch hinter S. 4 gesetzt worden, trotzdem diese Stellung von Rob. Simson mit Recht bemängelt worden. Der Zusatz ist auch in S. 7 eigentlich nur für den speziellen Fall dieses Satzes bewiesen. Er folgt aber direkt aus der Definition 5, denn wenn $pa >=< qb$ und ebenso $pc >=< qd$, für beliebige Anzahlwerte von p und q, so ist $qb <=> pa$ und ebenso $qd <=> pc$ und wegen der Variabilität von p und q heifst dies nach Definition 5 $b : a = d : c$.

8.

Von ungleichen Gröfsen hat die gröfsere zu ein und derselben Gröfse ein gröfseres Verhältnis, wie die kleinere, und dieselbe Gröfse hat zur kleineren ein gröfseres Verhältnis wie zur gröfseren.

(Fig. 8.) $AB > \Gamma$ und Δ eine beliebige dritte Gröfse. Man mache $EB = \Gamma$ und es sei zuerst $AE < EB$. Man multipliziert AE so lange, bis sein Vielfaches ZH gröfser als Δ ist (Definition 4), und $H\Theta$ sei dasselbe Vielfache von EB und K von Γ, wie ZH von AE (hier das zweifache). Nun nehme man $2\Delta = \Lambda$, $3\Delta = M$ und so fort, bis man zum ersten Vielfachen von Δ gelangt, das gröfser ist als K, es sei $N = 4\Delta$.

Fig. 8.

Da nun K zuerst kleiner als N, so ist K nicht kleiner als M. Nach S. 1 ist $Z\Theta$ dasselbe Vielfache von AB, wie ZH von AE und $H\Theta$ von EB, wie K von Γ und $H\Theta$ ist $= K$; also ist auch $H\Theta$ nicht kleiner als M. Aber $ZH > \Delta$, also $Z\Theta > \Delta + M$, aber $\Delta + M = N$, da $M = 3\Delta$ und $M + \Delta = 4\Delta$ und N auch $= 4\Delta$ ist; also $Z\Theta > N$. Aber K übertrifft N nicht. Und $Z\Theta$ und K sind gleiche Vielfache von AB und Γ, aber N ist ein bestimmtes Vielfaches von Δ; folglich nach Definition 7: $AB : \Delta > \Gamma : \Delta$.

Ich behaupte ferner, dafs $\Delta : \Gamma > \Delta : AB$. Denn durch dieselbe Konstruktion können wir auf ähnliche Art zeigen, dafs $N > K$ sei, aber nicht gröfser als $Z\Theta$, und N ist ein Vielfaches von Δ, und K

und $Z\Theta$ sind bestimmte Gleichvielfache von AB und Γ, also $\Delta : \Gamma > \Delta : AB$.

Zweiter Fall (Fig. 8a). $AE > EB$. Nun wird das vervielfältigte EB irgendwann gröſser als Δ werden, $H\Theta$ sei das Vielfache [$n = 2$] und ZH das nämliche Vielfache von AE und K von Γ. Wie vorher sind $Z\Theta$ und K Gleichvielfache von AB und Γ, und wie vorher sei N das erste Vielfache von Δ, das gröſser ist als ZH. Daher ist wieder ZH nicht kleiner, als M; aber $H\Theta > \Delta$. Also ist das ganze $Z\Theta > \Delta + M$, d. h. $Z\Theta > N$, aber K nicht gröſser als N, da ZH, das gröſser ist als $H\Theta = K$, nicht gröſser ist als N. Also wie im ersten Fall $AB : \Delta > \Gamma : \Delta$ und $\Delta : \Gamma > \Delta : AB$.

Fig. 8a.

9.

Gröſsen, welche zur selben Gröſse gleiches Verhältnis haben, sind gleich, und Gröſsen, zu denen die Gröſse das gleiche Verhältnis hat, sind gleich.

(Fig. 9.) $A : \Gamma = B : \Gamma$; also $A = B$, denn wenn nicht, so wäre nach S. 8 nicht $A : \Gamma = B : \Gamma$.

Ferner: Es sei $\Gamma : A = \Gamma : B$, so ist $A = B$, denn, wenn nicht, könnte (nach S. 8) nicht $\Gamma : A = \Gamma : B$ sein.

Fig. 9.

S. 9 ist Umkehr von S. 7.

10.

Ist $A : \Gamma > B : \Gamma$, so ist $A > B$; ist $\Gamma : A > \Gamma : B$, so ist $A < B$.

(Fig. 10.) Beweis indirekt, die Gleichheit verstöſst gegen Satz 7, das Kleinersein gegen Satz 8.

Fig. 10.

11.

Sind zwei Verhältnisse einem dritten gleich, so sind sie unter einander gleich.

(Fig. 11.) Es sei $A : B = \Gamma : \Delta$ und $\Gamma : \Delta = E : Z$, so ist $A : B = E : Z$. (Def. 5) $pa > = < qb$, $p\Gamma > = < q\Delta$, $pE > = < qZ$.

Fig. 11.

12.

Wenn beliebig viele Gröfsen in Proportion sind, so wird die Summe* aller führenden zur Summe aller folgenden sich verhalten wie ein führendes zu seinem* folgenden.

Fig. 12.

Es sei $A:B = \Gamma:\Delta = E:Z$; dann ist $A + \Gamma + E : B + \Delta + Z = A : B$ (Fig. 12). H, Θ, K sind Gleichvielfache von A, Γ, E [p] und Λ, M, N Gleichvielfache von B, Δ, Z [q]. Nach Satz 1 ist $H + \Theta + K = p(A + \Gamma + E)$ und $\Lambda + M + N = q(B + \Delta + Z)$, der Rest folgt aus Definition 5.

Summen durch ἄπαντα = omnia (von Euclid ist diese Bezeichnung nachweisbar bis Cavalieri und von da zu Leibniz (Integralzeichen)); statt „seinem“ steht bei Euclid einem.

13.

Wenn $A:B = \Gamma:\Delta$ und $\Gamma:\Delta > E:Z$, so wird auch $A:B > E:Z$ sein.

Fig. 13. Fig. 13a.

(Fig. 13.) Beweis unmittelbar aus der Definition 7 $p\Gamma > q\Delta$, pE nicht $> qZ$, Definition 5 $pA > qB$, also, Definition 7 $A:B > E:Z$. In der Figur $p = 2$, $q = 3$.

14.

Wenn $A:B = \Gamma:\Delta$ und $A \gtreqless \Gamma$, so ist $B \gtreqless \Delta$.

(Fig. 14.) $A:B > \Gamma:B$ nach S. 8, also nach 13 : $\Gamma:\Delta > \Gamma:B$, also nach 10: $B > \Delta$ etc.

Fig. 14.

15.

Teile sind mit ihren Gleichvielfachen in gleichem Verhältnis.

Formel $a:b = na:nb$.

Fig. 15.

(Fig. 15.) Sei $AB = n \cdot \Gamma$ und $\Delta E = n \cdot Z$, so soll $AB : \Delta E = \Gamma : Z$.

Unmittelbare Folge von Satz 12.

16.

Wenn vier Gröfsen in Proportion sind, so werden sie auch nach Vertauschung in Proportion sein.

(Fig. 16). Wenn $A : B = \Gamma : \Delta$, so soll $A : \Gamma = B : \Delta$ sein. Es ist der Satz: In einer Proportion lassen sich die inneren Glieder vertauschen. Man nehme gleiche Vielfache E und Z von A und B (hier dreifache) und von Γ und Δ die beliebigen gleichen Vielfachen H und Θ (zweifache), dann ist nach 15 $A : B = E : Z = \Gamma : \Delta = H : \Theta$. Aus 14 folgt: Ist $E >=< H$, so ist $Z >=< \Theta$. Es sind aber E und Z gleiche Vielfache von A und B und H und Θ gleiche Vielfache von Γ und Δ, also wenn $pA >=< q\Gamma$, so ist $pB >=< q\Delta$, also $A : \Gamma = B : \Delta$.

Fig. 16.

Clavius hebt hervor, dafs dieser Beweis nur gilt, wenn die vier Grössen unter sich gleichartig, Clavius hat in den Scholien zu den früheren Sätzen wiederholt bereits bemerkt, dafs viele der Sätze auch gelten, wenn A und B homogen unter sich und C und D desgleichen, aber A und C heterogen; hier bei Clavius findet sich schon der Beginn unserer modernen Auffassung, welche das Verhältnis $a : b$ mit dem Bruch a/b identifiziert.

17.

Wenn die verbundenen Gröfsen in Proportion sind, so sind es auch die getrennten.

Hier fehlt bei Heiberg die Figur, wohl aus Versehen, da sie sich bei Peyrard, Campanus, Zamberti, Clavius, Lorenz etc. findet, sie sei aus Peyrard ergänzt. Der Satz wird durch Definition 14 verständlich, wenn

$$(a + b) : b = (c + d) : d,$$

so ist $a : b = c : d$ (Fig. 17). Wenn $AB : BE = \Gamma\Delta : \Delta Z$, so $AE : BE = \Gamma Z : \Delta Z$. $H\Theta$, ΘK, ΛM, MN Gleich- (drei)

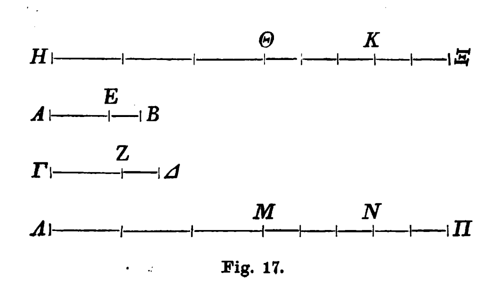


Fig. 17.

Vielfache von $AE, EB, \Gamma Z, \Delta Z$; — $K\Xi$, $N\Pi$ beliebige Gleichvielfache von BE und ΔZ (zweifache), nach Satz 1 ist $HK = 3AB$ und $\Lambda N = 3\Gamma\Delta$, $Z\Theta\Xi = 5EB$, $M\Pi = 5Z\Delta$ (S. 2). Weil $AB:BE = \Gamma\Delta:\Delta Z$, so ist, falls, wie hier, $HK > \Theta\Xi$, auch $\Lambda N > M\Pi$; nimmt man die gemeinsamen Stücke ΘK bezw. MN weg, so ist $H\Theta > K\Xi$ und $\Lambda M > N\Pi$. Also wenn $H\Theta > K\Xi$, so ist $\Lambda M > N\Pi$. Ebenso wird gezeigt, wenn $H\Theta = < K\Xi$, so ist $\Lambda M < = N\Pi$, also (Definition 5): $AE : BE = \Gamma Z : \Delta Z$.

$a + b : b = c + d : d$ d. h. nach Definition 5: wenn $p(a + b)$ d. i. $pa + pb > = < (p + q)b$ d. i. $pb + qb$, so ist $pc + pd > = < pd + qd$ oder wenn $pa > = < qb$, so ist $pc > = < qd$, d. h. aber nach Definition 5 $a : b = c : d$.

18.

Wenn die getrennten Gröfsen in Proportion sind, so sind es auch die zusammengesetzten.

(Fig. 18.) $AE:EB = \Gamma Z:Z\Delta$. Behauptung $AB:BE = \Gamma\Delta:Z\Delta$. Wenn die Behauptung nicht richtig, so sei $AB : BE = \Gamma\Delta : \Delta H$, wo $\Delta H < Z\Delta$ oder $>$. Es sei zuerst kleiner. Nach 17 ist die $AE : EB = \Gamma H : H\Delta$. Aber nach Voraussetzung $AE : EB = \Gamma Z : Z\Delta$. Aber $\Gamma H > \Gamma Z$, also $H\Delta > Z\Delta$ (S. 14), was unmöglich. Ebensowenig kann $\Delta H > Z\Delta$ sein.

Fig. 18.

Formel. Wenn $a : b = c : d$, so ist $a + b : b = c + d : d$, also Umkehrung von 17. Der Beweis ist von Saccheri als einer der „Flecken" des Euclid bezeichnet und von ihm geändert, Simson hat sich dem Urteil Saccheri's angeschlossen, aber dessen Beweis verworfen. Der Beweis setzt nämlich das schon von Clavius hervorgehobene Axiom voraus. „Es giebt stets zu drei Strecken eine vierte Proportionale", deren Konstruktion aber erst im sechsten Buche gelehrt wird, siehe Anm. zu S. 5. Übrigens findet sich bei Campanus (Baseler Ausgabe Hervagius) ein von „Flecken" freier Beweis.

19.

Wenn das Ganze zum Ganzen sich verhält, wie das Weggenommene zum Weggenommenen, so hat der Rest zum Rest das gleiche Verhältnis.

A — E — B

Γ — Z — Δ

Fig. 19.

(Fig. 19.) $AB : \Gamma\Delta = AE : \Gamma Z$. Behauptung $EB : Z\Delta = AB : \Gamma\Delta$. Vertausche die inneren Glieder $AB : AE = \Gamma\Delta : \Gamma Z$, und nach S. 17 $EB : AE = \Delta Z : \Gamma Z$ und mit nochmaliger Vertauschung $BE : \Delta Z = AE : \Gamma Z = AB : \Gamma\Delta$.

Zusatz.

Hieraus erhellt, wenn Gröfsen in der Verbindung in Proportion sind, so sind sie es auch in Umwendung (Definition 16).

Formel: Aus $a : b = a - x : b - y$ folgt $a : b = x : y$
heute:

$$\frac{a}{c} = \frac{a-x}{b-y} = \frac{\text{Differenz der Zähler}}{\text{Differenz der Nenner}} = \frac{x}{y}.$$

20.

Wenn drei Gröfsen [A, B, Γ] gegeben sind und ebenso drei andere [Δ, E, Z], zu je zwei genommen, im selben Verhältnis, [$A : B = \Delta : E$, $B : \Gamma = E : Z$] und es ist $A >=< \Gamma$, so ist $\Delta >=< Z$.

A — Δ —
B — E —
Γ — Z —

Fig. 20.

(Fig. 20.) Es ist nach S. 8 $A : B > \Gamma : B$, also $\Delta : E > \Gamma : B$, also (Zusatz zu S. 7) $\Delta : E > Z : E$, also nach S. 10 $\Delta > Z$ etc.

21.

Wenn drei Gröfsen [A, B, Γ] gegeben sind, und drei andere Δ, E, Z, zu zwei genommen, im selben Verhältnis, aber in gestörter Proportion [$A : B = E : Z$, $B : \Gamma = \Delta : E$], und $A >=< \Gamma$ ist, so ist $\Delta >=< Z$.

A — Δ —
B — E —
Γ — Z —

Fig. 21.

(Fig. 21.) $A > \Gamma$; $A : \Delta > \Gamma : B$ (S. 8), und durch Inversion (Satz 7, Zusatz) $\Gamma : B = E : \Delta$, also $E : Z > E : \Delta$, also $\Delta > Z$ (S. 10) etc.

22.

Wenn beliebig viele Gröfsen $A, B, \Gamma \ldots$ gegeben sind, und eine andere Reihe von ebenso viel Gröfsen $\Delta, E, Z \ldots$ und sie zu je zweien [der Reihe nach] im gleichen Verhältnis, dann sind sie der Gleichheit wegen (Defin. 17) im selben Verhältnis [$A : \Gamma = \Delta : Z$].

(Fig. 22.) Denn seien H und Θ Gleichvielfache von A und Δ und K und Λ beliebige Gleichvielfache von B und E, sodann M und N wieder beliebige Gleichvielfache von Γ und Z, so ist nach S. 4 $H:K = \Theta:\Lambda$ und $K:M = \Lambda:N$. Da nun H, K, M drei Gröfsen sind, Θ, Λ, N drei andere zu je zweien proportionale, so ist nach Satz 20, wenn $H >=< M$ ist, auch $\Theta >=< N$, also nach Definition 5 $A:\Gamma = \Delta:Z$.

Fig. 22.

S. 20 und 21 sind nur Hilfssätze für 22 und 23, das „δι' ἴσου“ in 20 und 21 hat mit dem Δι' ἴσου in Definition 17 nichts zu thun, es kann in der Übersetzung weggelassen werden, bezw. ist ἐὰν dahinter zu ergänzen: „in gleichmäfsiger Weise ist, wenn $A > \Gamma$ das $\Delta > Z$, wenn $A = \Gamma$ etc. . . .“ In S. 22 aber ist δι' ἴσου der term. techn. der Definition 17.

23.

Wenn drei Gröfsen A, B, Γ gegeben sind, und drei andere Δ, E, Z mit ihnen in gestörter Proportion, so sind sie auch in Proportion zufolge Gleichheit.

(Fig. 23.) Es ist $A:B = E:Z$ und $B:\Gamma = \Delta:E$, Behauptung $A:\Gamma = \Delta:Z$. Beweis H, Θ, K Gleichvielfache von A, B, Δ, und unter sich Gleichvielfache Λ, M, N von Γ, E, Z, dann ist nach S. 15 $H:\Theta = A:B$ und $E:Z = M:N$; folglich

$$H:\Theta = M:N.$$

Fig. 23.

Da $B:\Gamma = \Delta:E$, so ist durch Vertauschung der inneren Glieder $B:\Delta = \Gamma:E$, also $\Theta:K = \Lambda:M$, also $\Theta:\Lambda = K:M$. Also fallen H, Θ, Λ und K, M, N unter S. 21, d. h. wenn $H ><= \Lambda$, so ist $K ><= N$, d. h. aber (nach Definition 5) $A:\Gamma = \Delta:Z$.

24.

Ist $A:B = \Gamma:\Delta$ und $E:B = Z:\Delta$, so ist $A + E:B = \Gamma + Z:\Delta$.

(Fig. 24.) Es ist $A:B:E = \Gamma:\Delta:Z$, also nach S. 22 $A:E = \Gamma:Z$, also nach S. 18 $A + E:E = \Gamma + Z:Z$. Und da $E:B$

$= Z : \Delta$, so ist infolge Gleichheit (S. 22) mit Benutzung der Inversion $A + E : \Gamma + Z = E : Z = B : \Delta$, $A + E : \Gamma + Z = B : \Delta$, also

$$A + E : B = \Gamma + Z : \Delta.$$

Fig. 24.

S. 24 zeigt mit gröfster Schärfe, dafs hier im fünften Buch Eudoxus die gewöhnlichen Regeln der Rechnung mit Brüchen auf Streckenbrüche erweitert, id est dafs es sich im fünften Buch um nichts anderes handelt, als um die strenge Begründung der Rechnungsregeln für Irrationalzahlen, und dafs der Gang des Eudoxus von dem unseres Weierstrafs nur unwesentlich abweicht.

25.

Sind vier Gröfsen in Proportion, so sind die gröfste und kleinste zusammen gröfser als die übrigen zu zweien.

(Fig. 25.) Es sei $AB : \Gamma\Delta = E : Z$ und AB die gröfste, Z die kleinste von ihnen, so soll $AB + Z > \Gamma\Delta + E$ sein.

Sei $AH = E$ und $\Gamma\Theta = Z$, so ist $AB : \Gamma\Delta = AH : \Gamma\Theta$.

Folglich nach S. 19 $HB : \Theta\Delta = AB : \Gamma\Delta$.

Aber $AB > \Gamma\Delta$, folglich $HB > \Theta\Delta$.

Fig. 25.

Da $AH = E$ und $\Gamma\Theta = Z$, so ist $AH + Z = \Gamma\Theta + E$, und wenn man den ungleichen Gröfsen HB und $\Theta\Delta$ diese gleiche Gröfsen hinzufügt, so ist $AB + Z > \Gamma\Delta + E$. q. e. d.

„Zusammen“ gleich „καὶ“. Die Übersetzung „als die zwei übrigen“ entspricht weder dem Sinn noch dem Wortlaut.

VI. [Buch].

Erklärungen.

1) Grundlinige Figuren sind ähnlich, wenn sie der Reihe[1]) nach gleiche Winkel haben und die Seiten, welche gleichen Winkel einschliefsen, proportional sind.

2) Man sagt: Eine Strecke[2]) werde ausgezeichnet[3]) und nach mittlerem Verhältnis geteilt, wenn die ganze zum gröfseren Abschnitt [sich verhält], wie der gröfsere Abschnitt zum kleineren.

3) Höhe einer jeglichen Figur ist das von der Spitze auf die Grundlinie gefällte Lot.

Anmerkungen.

1) *κατα μίαν* „einzeln". 2) *εὐθεῖα* ohne Artikel und ohne Zusatz. 3) *ἀκρόν*; die Übersetzung „äufserst" (franz. extrême) giebt keinen Sinn, noch weniger „äufsern".

1.

Dreiecke und Parallelogramme von gemeinsamer [gleicher] Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien.

(Fig. 1.) Es seien $AB\Gamma$ und $A\Gamma\Delta$ die Dreiecke, $E\Gamma$ und ΓZ die Parallelogramme von derselben Höhe $A\Gamma$. Man verlängere $B\Delta$ nach beiden Seiten, mache $\Gamma B = BH = H\Theta$ etc. und $\Gamma\Delta = \Delta K = K\Lambda$ und ziehe AH, $A\Theta$ etc. und AK, $A\Delta$ etc. Dann sind (nach I, 38) die Dreiecke $AB\Gamma$, ABH, $AH\Theta$ gleich und ebenso die Dreiecke $A\Gamma\Delta$, $A\Delta K$, $AK\Lambda$ etc. Also ist $\Theta\Gamma$ dasselbe Vielfache von $B\Gamma$ wie $AB\Theta$ von $AB\Gamma$ und $\Gamma\Lambda$ dasselbe Vielfache von $\Gamma\Delta$ wie $A\Gamma\Lambda$ von $A\Gamma\Delta$.

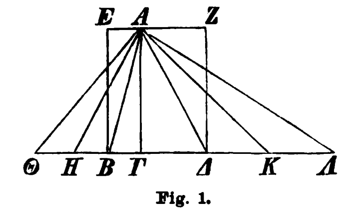


Fig. 1.

Und wenn $\Theta\Gamma = \Gamma A$, so ist Dreieck $A\Theta\Gamma =$ Dreieck $A\Gamma A$ und wenn gröfser gröfser, wenn kleiner kleiner. Es sind aber $\Gamma\Theta$ und $A\Gamma\Theta$ Gleichvielfache von $B\Gamma$ und $AB\Gamma$ und ΓA und $A\Gamma A$ beliebig* gleiche Vielfache von $\Gamma\Delta$ und $A\Gamma\Delta$, also (Definition 5)

$$B\Gamma : \Gamma\Delta = \text{Dreieck } AB\Gamma : A\Gamma\Delta$$

und da die gleichvielten Teile dasselbe Verhältnis haben, wie ihre Ganzen (V, 15), mit Benutzung von V, 11

$$B\Gamma : \Gamma\Delta = E\Gamma : \Gamma Z.$$

Der Beweis setzt als selbstverständlichen Folgesatz von I, 38 den Satz voraus: Von zwei Dreiecken mit gleicher Höhe und ungleicher Grundlinie ist das mit der gröfseren Grundlinie das gröfsere. Der Satz ist unmittelbar auf Dreiecke und Parallelogramme mit gleicher Höhe auszudehnen und wird auch von Euclid so ausgedehnt angewendet. Eine Ungeschicklichkeit ist es, dafs $\Gamma\Theta$ das gleiche Vielfache von $B\Gamma$ ist, wie ΓA von $\Gamma\Delta$.

2.

Wenn parallel einer der Seiten des Dreiecks eine Gerade gezogen wird, so wird sie die Seiten des Dreiecks proportional schneiden. Und wenn die Seiten eines Dreiecks proportional geschnitten werden, so wird die Verbindungslinie der Schnittpunkte der übrig bleibenden Seite des Dreiecks parallel sein.

(Fig. 2.) ΔE sei $\parallel B\Gamma$. Man ziehe BE und $\Gamma\Delta$, dann ist Dreieck $B\Delta E = \Gamma\Delta E$ (I, 38). Also:

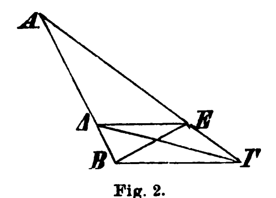


Fig. 2.

$$\frac{B\Delta E}{A\Delta E} = \frac{\Gamma\Delta E}{A\Delta E}; \text{ aber } \frac{B\Delta E}{A\Delta E} = \frac{\Delta B}{\Delta A} \text{ (S. 1).}$$

Aus gleichem Grunde $\Gamma\Delta E : A\Delta E = E\Gamma : AE$, also $B\Delta : \Delta A = \Gamma E : EA$. q. e. d.

Umgekehrt. Die Seiten von $AB\Gamma$ seien in Δ und E so geschnitten, dafs $B\Delta : \Delta A = \Gamma E : EA$ und es werde ΔE gezogen, so ist $\Delta E \parallel B\Gamma$. Durch dieselbe Konstruktion ergiebt sich jetzt $B\Delta E = \Gamma\Delta E$, da diese Dreiecke dieselbe Grundlinie ΔE haben und die gleiche Fläche, so sind sie [nach I, 39] in denselben Parallelen, also ist $\Delta E \parallel B\Gamma$.

3.

Wenn ein* Winkel des* Dreiecks halbiert wird, und die Halbierende auch die Basis schneidet, so verhalten sich

die Abschnitte der Basis wie die anderen* Seiten des Dreiecks und umgekehrt.

(Fig. 3.) Das Dreieck sei $AB\Gamma$, die Halbierungslinie $A\varDelta$, und ΓE parallel $A\varDelta$ gezogen, dann ist wegen der Gleichheit der Basiswinkel (I, 29) $A\Gamma = AE$, also nach Satz 2

$$B\varDelta : \varDelta\Gamma = BA : A\Gamma.$$

Fig. 3.

Umgekehrt, wenn diese Gleichung erfüllt ist, so sind $A\Gamma$ und AE gleich, also die Basiswinkel, und damit nach I, 29 auch $\sphericalangle BA\varDelta = \sphericalangle \varDelta A\Gamma$.

„ein" griech. ἡ; „das" griech. ohne Artikel; die unbestimmte Fassung des Satzes wird durch den Beweis korrigiert, es müſste heiſsen: „wie die anliegenden". Es fehlt der zweite Teil, die Halbierungslinie des Auſsenwinkels. Der vollständige Satz, auf dem der sogenannte Kreis des Apollonius (De det. sect.) beruht, und die Lehre von der harmonischen Teilung ihren historischen Ausgang genommen hat, ist hier nur mit seinem ersten Teil vertreten. Da aber Pappus den anderen Teil ebenfalls als einen Satz der Elemente erwähnt, so glaubt Simson, er sei durch einen unwissenden Editor weggelassen.

4.

In gleichwinkligen Dreiecken sind die Seiten, welche ein Paar gleicher Winkel einschlieſsen, dem Verhältnis nach gleich* und es sind [dann] die Seiten homolog, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen.

(Fig. 4.) Es seien $AB\Gamma$ und $\varDelta\Gamma E$ die Dreiecke, so daſs $\sphericalangle AB\Gamma = \varDelta\Gamma E$, $BA\Gamma = \Gamma\varDelta E$, dazu noch $A\Gamma B = \varDelta E\Gamma$. $B\Gamma$ und ΓE mögen in einer Geraden liegen und BA und $E\varDelta$ schneiden sich (5. Postulat) in Z. Dann ist $BZ \parallel \Gamma\varDelta$ (I, 28) und $A\Gamma \parallel EZ$, also $ZA\Gamma\varDelta$ ein Parallelogramm und $ZA = \varDelta\Gamma$, $A\Gamma = Z\varDelta$, also (nach S. 2) $BA : \Gamma\varDelta = B\Gamma : \Gamma E$ und durch Inversion $BA : B\Gamma = \Gamma\varDelta : \Gamma E$. Ebenso folgt, weil $A\Gamma \parallel EZ$ ist: $BA : A\Gamma = \Gamma\varDelta : \varDelta E$.

Fig. 4.

Satz 4 ist der bekannte Hauptsatz der Ähnlichkeitslehre, der in unseren Lehrbüchern gewöhnlich durch Analogie des zweiten Kongruenzsatzes der zweite

Ähnlichkeitssatz heifst. Euclid aber stellt ihn an die Spitze, wohin er gehört und beweist ihn mittelst des Streifensatzes 2.

5.

Wenn zwei Dreiecke dem Verhältnis nach gleiche Seiten haben, so werden die Dreiecke gleichwinklig sein und die Winkel, welche homologen Seiten gegenüberliegen, gleich haben.

(Fig. 5.) $AB\Gamma$ und ΔEZ seien die Dreiecke, so dafs $AB : B\Gamma = \Delta E : EZ$ und $B\Gamma : \Gamma A = EZ : Z\Delta$, $BA : A\Gamma = E\Delta : \Delta Z$. Behauptung $\sphericalangle AB\Gamma = \Delta EZ$ etc. Man konstruiere EZH, so dafs $\sphericalangle ZEH = AB\Gamma$ und $EZH = A\Gamma B$ (I, 23), daher ist $\sphericalangle$ bei A gleich $\sphericalangle$ bei H (I, 32). Daher sind $AB\Gamma$ und EHZ winkelgleich und nun folgt aus S. 4, dafs $EH = E\Delta$ und $ZH = Z\Delta$, also EZH Dreieck ΔEZ nach I, 8 kongruent.

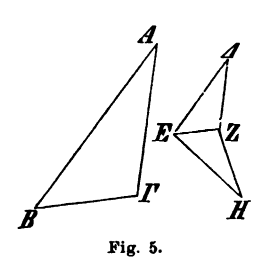


Fig. 5.

Dritter Ähnlichkeitssatz, „dem Verhältnis nach gleich", griech. „ἀνάλογον".

6.

Wenn zwei Dreiecke in einem Winkel übereinstimmen und die Seiten, welche die gleichen Winkel einschliefsen, in gleichem Verhältnis stehen, so sind die Dreiecke winkelgleich, und es sind die Winkel gleich, welche den homologen Seiten gegenüberliegen.

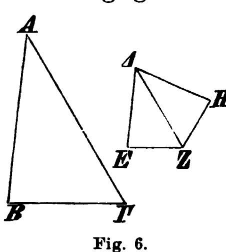


Fig. 6.

(Fig. 6.) $AB\Gamma$ und ΔEZ die Dreiecke, $\sphericalangle BA\Gamma = E\Delta Z$ und $BA : A\Gamma = \Delta E : \Delta Z$. Behauptung $\sphericalangle AB\Gamma = \Delta EZ$, $\sphericalangle A\Gamma B = \Delta ZE$. Man konstruiere an ΔZ das Dreieck ΔHZ, so dafs $\sphericalangle Z\Delta H = E\Delta Z = BA\Gamma$ und $\sphericalangle \Delta ZH = A\Gamma B$, dann ist $\sphericalangle$ bei H gleich $\sphericalangle$ bei B; also sind $BA\Gamma$ und $Z\Delta H$ winkelgleich, also $BA : A\Gamma = H\Delta : \Delta Z = \Delta E : \Delta Z$, also $H\Delta = \Delta E$, also ΔEZ kongruent $Z\Delta H$ nach I, 4 etc.

Der sogenannte 1. Ähnlichkeitssatz ist also bei Euclid der 3., völlig entsprechend der Bedeutung der Sätze für die Anwendungen.

7.

Wenn zwei Dreiecke einen Winkel gemeinsam haben und die Seiten, welche einen anderen* Winkel einschliefsen, in gleichem Verhältnis stehen, und von dem dritten Winkelpaar jeder zugleich kleiner oder nicht kleiner* als ein Rechter, so sind die Dreiecke gleichwinklig, und haben die Winkel gleich, deren einschliefsende Seiten in gleichem Verhältnis stehen.*

(Fig. 7.) Es seien $AB\Gamma$ und ΔEZ die Dreiecke, $\sphericalangle BA\Gamma = E\Delta Z$ und $AB : B\Gamma = \Delta E : EZ$ und die Winkel bei Γ und Z beide im ersten Falle kleiner als ein Rechter. Behauptung $\sphericalangle AB\Gamma = \Delta EZ$. Beweis indirekt: Es sei $\sphericalangle AB\Gamma > \Delta EZ$ und $\sphericalangle ABH = \Delta EZ$, daher sind ABH und ΔZE gleichwinklig und $AB : BH = \Delta E : EZ$, also $BH = B\Gamma$, dann müfste $BH\Gamma$ einerseits als Nebenwinkel eines spitzen Winkels gröfser als ein Rechter, andererseits als Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck kleiner als ein Rechter sein, also kann $AB\Gamma$ nicht von ΔEZ verschieden sein. Ebenso geht der Beweis, wenn die Winkel bei Γ und Z stumpf vorausgesetzt werden.

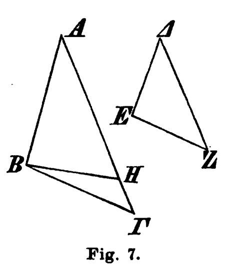


Fig. 7.

Der Plural ἄλλας bezieht sich auf einen Winkel in jedem der Dreiecke. Der Fall, dafs beide Rechte sind, ist als durch S. 4 erledigt nicht behandelt. Rob. Simson hat hinzugefügt „oder einer ein Rechter“. Zu bemerken ist, dafs mit Satz 7 erst der vierte Kongruenzsatz, der im Buch I fehlt, bewiesen ist.

8.

Wird im rechtwinkligen Dreieck vom rechten Winkel aus bis zur Basis hin das Lot gezogen, so sind die Dreiecke an dem Lote sowohl dem ganzen als untereinander ähnlich.

(Fig. 8.) Übereinstimmung in den Winkeln und S. 4.

Fig. 8.

Zusatz.

Hieraus erhellt, dafs, wenn im rechtwinkligen Dreieck vom rechten Winkel aus bis zur Basis hin das Lot gezogen wird, das Lot die mittlere Proportionale der Abschnitte ist (und zwischen der Basis und einem der Abschnitte ist die dem Abschnitt anliegende Seite mittlere Proportionale).

Heiberg hat den rund geklammerten Schlufs des Zusatzes als unzweifelhaft gefälscht weggelassen, es folgt das auch aus sachlichen Gründen, denn während der erste Teil wiederholt als Stütze von Beweisen im Euclid gebraucht wird (VI, 13, X, 34, XIII, 13), kommt der zweite bei Euclid nicht vor.

Robert Simson hat, vermutlich mit Recht, auch den Beweis für überarbeitet erklärt, der bei Campanus (Bas. Ausg. von 1546 p. 145 ob.) stark abgekürzt ist. Auffallend ist scheinbar, dafs während bei den eigentlichen Ähnlichkeitssätzen 4, 5, 6, 7 das Wort ähnlich vermieden ist, es von 8 ab auftritt; doch ist erst durch diesen Satz die Existenz ähnlicher Figuren im Sinne der Definition festgestellt.

9.

Von einer gegebenen Strecke einen vorgeschriebenen Bruchteil abzuschneiden.

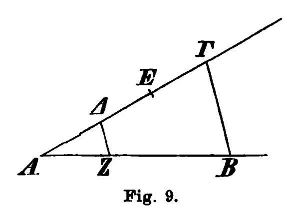


Fig. 9.

(Fig. 9.) Die gegebene Strecke sei AB, der vorgeschriebene Teil sei der dritte. Man ziehe von A einen beliebigen Strahl $A\Gamma$, nehme auf ihm einen beliebigen Punkt Δ, und mache $A\Delta = \Delta E = E\Gamma$, ziehe $B\Gamma$ und durch Δ dazu die Parallele ΔZ.

Nach 2 ist $\Gamma\Delta : \Delta A = BZ : ZA$, aber $\Gamma\Delta = 2\Delta A$, also auch $BZ = 2ZA$, folglich $BA = 3AZ$.

Der Beweis ist von R. Simson (1756) und Pfleiderer bemängelt worden, da im fünften Buch ein Satz fehle: Wenn $a : b = c : d$ und $a = nb$, so ist $c = nd$ (wo n eine Anzahl); aber dieser Satz selbst ist unmittelbar in der Definition 5 des fünften Buches mitgegeben.

10.

Eine gegebene ungeschnittene Strecke auf dieselbe Art zu zerschneiden, wie eine gegebene zerschnittene Strecke.

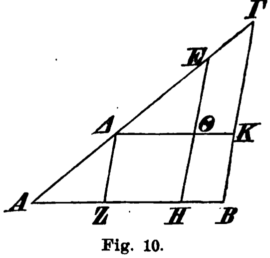


Fig. 10.

(Fig. 10.) Die unzerschnittene sei AB, die zerschnittene $A\Gamma$, die Schnittpunkte Δ, E, und sie möge so liegen, dafs sie mit AB einen beliebigen Winkel einschliefse. Man ziehe $B\Gamma$ und durch Δ, E die Parallelen ΔZ, EH.

Durch Δ werde die Parallele $\Delta\Theta K$ zu AB gezogen, so sind $Z\Theta$, ΘB Parallelogramme und deshalb $\Delta\Theta = ZH$ und $\Theta K = HB$ und (nach 2) $\Gamma E : E\Delta = K\Theta : \Theta\Delta = BH : HZ$ etc.

S. 10 enthält die Lösung der Teilungs-Aufgabe, der wichtigsten der Geometrie des Maſses, sie geht ursprünglich vom Streifen aus, die vereinfachende Variante, welche Fig. 10a zeigt, findet sich bei Clavius p. 555, nach Pfleiderer auch bei Maurolycos 1575. Die elegante und bekannte Lösung Fig. 10b ist gleichzeitig von Simon Stevin (Hypomnem. math. Leyden 1605) und Clavius p. 555 gegeben, der sie schon I, 10 verspricht.

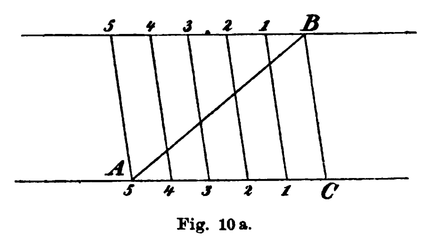


Fig. 10a.

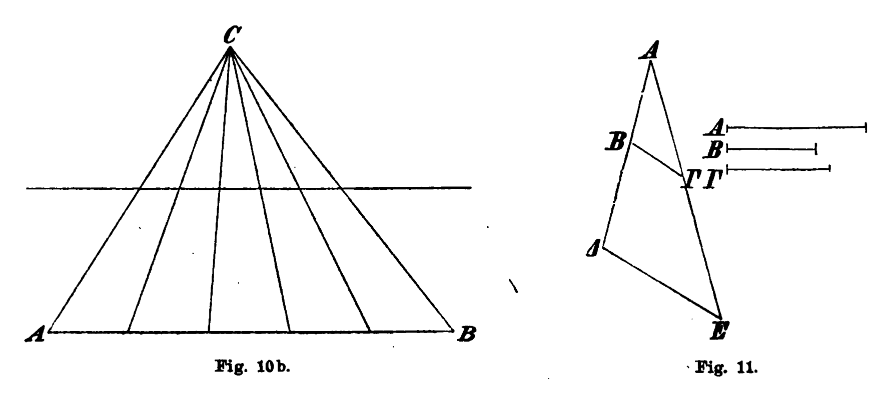


Fig. 10b. Fig. 11.

11.

Zu zwei gegebenen Strecken die dritte Proportionale zu finden.

(Fig. 11.) Die gegebenen Strecken seien AB, $A\Gamma$; man mache $B\Delta = A\Gamma$, und ziehe durch Δ zu $B\Gamma$ die Parallele ΔE, so ist ΓE die verlangte (S. 2).

Die bekannte Konstruktion einer unbegrenzten kontinuierlichen Proportionalen $A : B = B : C = C : D$ etc. findet sich bei Clavius S. 561 (Ausg. von 1607), wo S. 562 die für die Würfelverdoppelung nötige Einschaltung zweier Proportionalen besprochen wird.

12.

Zu drei gegebenen Strecken die vierte Proportionale zu finden.

(Fig. 12.) A, B, Γ die Strecken; $\Delta H = A$, $HE = B$; $\Delta \Theta = \Gamma$, so ist nach S. 2 ΘZ die gesuchte Strecke.

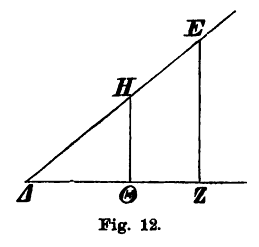


Fig. 12.

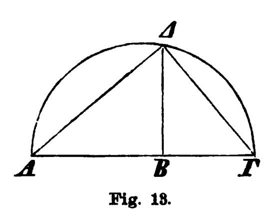


Fig. 13.

13.

Zu zwei gegebenen Strecken die mittlere Proportionale zu finden.

(Fig. 13.) $AB, B\Gamma$ die gegebenen Strecken, $B\Delta$ die verlangte (S. 8, Zusatz). — Die Variante, welche die gröfsere Strecke zur Hypotenuse macht, bei Pappos III, 6; sie fehlt bei Euclid mit Absicht, da sie eine nicht in der Aufgabe gegebene Unterscheidung zwischen den Strecken nötig macht.

14.

In gleichen und gleichwinkligen Parallelogrammen stehen die Seiten, welche gleiche Winkel einschliefsen, in umgekehrtem Verhältnis, und wenn in Parallelogrammen, welche ein Winkelpaar gleich haben, die einschliefsenden Seiten in umgekehrtem Verhältnis stehen, so sind sie gleich.

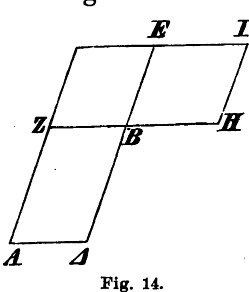


Fig. 14.

(Fig. 14.) AB und $B\Gamma$ die Parallelogramme, man lege sie wie in der Figur, und ergänze das Parallelogramm ZE, so ist nach S. 1 $AB : ZE = \Delta B : BE$ und $B\Gamma : ZE = BH : ZB$ und da $AB = B\Gamma$, so folgt $\Delta B : BE = BH : ZB$.

q. e. d. etc.

Der Satz ist der Satz von dem Ergänzungsparallelogramm I, 43 und aus der Rechnung mit den Streckenbrüchen, bezw. aus dem Satz: „Das Verhältnis zweier gleichartiger Gröfsen ist gleich dem ihrer Mafszahlen“ hervorgegangen und

gestattet den Übergang vom Streckenprodukt zum Streckenbruch u. v. v., — „im umgekehrten Verhältnis stehen“ „ἀντιπέπονθα“ von αντιπασχω „das entgegengesetzte (id est die Umkehrung des Verhältnisses) erleiden“. Beim Beweis ist die Umkehrung des Satzes über die Scheitelwinkel stillschweigend benutzt (Proclus zu I, 13).

15.

Haben flächengleiche Dreiecke je einen Winkel gleich, so stehen die Seiten, welche diese gleichen Winkel einschliefsen, in umgekehrtem Verhältnis; haben die Dreiecke je einen Winkel gleich und stehen die einschliefsenden Seiten in umgekehrtem Verhältnis, so sind die Dreiecke flächengleich.

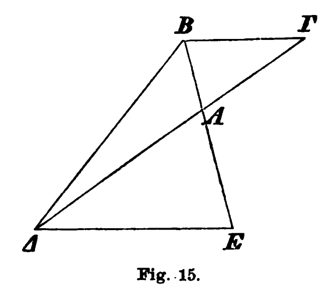
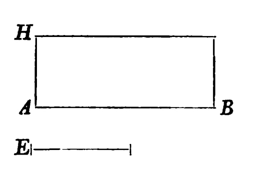


Fig. 15.

Es seien (Fig. 15) $AB\Gamma$ und $A\Delta E$ die flächengleichen Dreiecke und die Winkel bei A gleich. Man lege sie wie in der Figur und ziehe $B\Delta$. Dann ist nach Satz 1: $\Gamma AB : BA\Delta = A\Gamma : A\Delta$ und $EA\Delta : BA\Delta = EA : AB$, also $A\Gamma : A\Delta = AE : AB$ etc.

16.

Wenn vier Strecken eine Proportion bilden, so ist das Rechteck aus den äufseren Gliedern dem Rechteck aus den inneren Gliedern gleich; und wenn das Rechteck aus den äufseren Gliedern dem Rechteck aus den inneren Gliedern gleich ist, so sind die vier Strecken in Proportion.



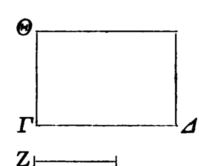


Fig. 16.

(Fig. 16.) Die vier Strecken seien AB, $\Gamma\Delta$, E, Z, so dafs $AB : \Gamma\Delta = E : Z$, ich behaupte, dafs $AB \cdot Z = \Gamma\Delta \cdot E$ sei (man macht $AH = Z$ und $\Gamma\Theta = E$ und wendet S. 14 an).

17.

Wenn eine Proportion von drei Strecken besteht, so ist das Rechteck aus den äufseren Gliedern dem Quadrat des mittleren gleich, und wenn das Rechteck aus dem äufseren

Fig. 17.

dem Quadrat des mittleren gleich, so besteht die Proportion von drei Gliedern.

(Fig. 17.) A, B, Γ, so dafs $A : B = B : \Gamma$; die Hilfsstrecke $\Delta = B$; ihre Einführung erscheint uns ganz überflüssig, doch hat Euclid in S. 16, von dem 17 eigentlich ein Spezialfall ist, von vier Strecken gesprochen.

18.

Von einer gegebenen Strecke aus eine geradlinige Figur zu entwerfen, welche einer gegebenen geradlinigen Figur ähnlich und ähnlich liegend ist.

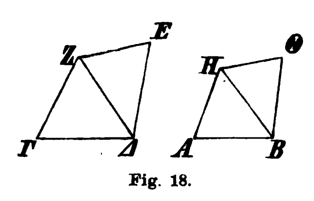


Fig. 18.

(Fig. 18.) Die gegebene Strecke sei AB und die gegebene Figur ΓE. Man ziehe ΔZ und trage in A und B an AB die Winkel $HAB = \Gamma$ und $HBA = Z\Delta\Gamma$ an (I, 23), dann lege man in B und H an BH die Winkel $HB\Theta = Z\Delta E$ und $\Theta HB = EZ\Delta$ an (S. 4).

Was unter „ähnlich liegen" verstanden wird, ist nicht gesagt, aus der Konstruktion folgt, dafs gemeint ist, dafs durch Zuordnung von AB zu einer bestimmten Seite $\Gamma\Delta$ das Verhältnis der Mafsstäbe vorgeschrieben ist und zugleich die entsprechende Reihenfolge der analogen Stücke. Das Prinzip wird in S. 20 aufgedeckt, es besteht darin, die Figur in Dreiecke zu zerschneiden; daher ist die Ordnung der Sätze bei Campanus bezw. im Arabischen Euclid, wo die Aufgabe nach S. 20 kommt, natürlicher; auch dafs Campanus ein Fünfeck als Beispiel wählt, ist vorzuziehen, da die in der gegebenen Figur zerschnittenen Winkel in gleicher Reihenfolge zusammengesetzt werden müssen.

19.

Ähnliche Dreiecke stehen zu einander im quadratischen Verhältnis ihrer Seiten.

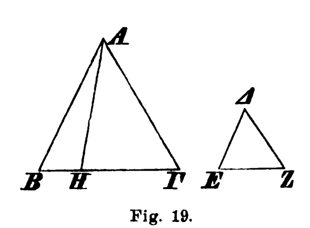


Fig. 19.

(Fig. 19.) $AB\Gamma \sim \Delta EZ$, $\sphericalangle B = \sphericalangle E$ und $B\Gamma$ und EZ seien homolog. Man konstruiert BH so, dafs $B\Gamma : EZ = EZ : BH$ (S. 11) und zieht AH. Da $AB : B\Gamma = \Delta E : EZ$ (nach Voraussetzung), ist auch $AB : \Delta E = B\Gamma : EZ$ (V, 16), also auch gleich $EZ : BH$, also auch (S. 15) Dreieck ABH flächengleich

ΔEZ; aber ABH und $AB\Gamma$ nach S. 1 $= BH : B\Gamma$, somit

$$AB\Gamma : \Delta EZ = B\Gamma : BH$$

und da $B\Gamma : EZ = EZ : B\Gamma$, so ist (V, Def. 9)

$$AB\Gamma : \Delta EZ^{*)} = [\Gamma B : EZ]^2.$$

Zusatz.

Hieraus erhellt, wenn drei Strecken proportional sind, so verhält sich die erste zur dritten, wie die Figur über der ersten entworfen zu der ähnlich und ähnlich liegenden, die über der zweiten (mittleren) entworfen ist.

Der Zusatz gehört eigentlich zu S. 20; man darf auch nicht schreiben, wie Heiberg, $\Gamma B^2 : EZ^2$, bis S. 20 bewiesen ist.

20.

Ähnliche Polygone werden in gleichviel ähnliche und den ganzen (Polygonen) entsprechende Dreiecke geteilt und ein Polygon hat zum anderen das quadratische Verhältnis, welches eine homologe Seite zur anderen hat.

(Fig. 20.) Es wird mittelst des Ähnlichkeitssatzes 6 die Ähnlichkeit der Dreiecke dargethan, ihre Gleichzahl wird dem Augenschein entnommen, dann folgt der Beweis, dafs die Diagonalen sich proportional schneiden — $AM : M\Gamma = ZN : N\Theta$; $AM : M\Gamma$ (nach S. 1) $= BAM : BM\Gamma$

und gleich $EAM : EM\Gamma = ABE : BE\Gamma$ (V, 12) und ebenso

$$ZN : N\Theta = ZH\Lambda : H\Lambda\Theta.$$

Fig. 20.

Und ebenso wird gezeigt, dafs $BE\Gamma : \Gamma E\Delta = H\Lambda\Theta : \Theta\Lambda K$ und damit nach V, 12 $ABE : HZ\Theta = AB\Gamma\Delta E : ZH\Theta K\Lambda$ und gleich $(AB : ZH)^2$.

Zusatz.

Ebenso wird auch bei Vierecken gezeigt, dafs sie im quadratischen Verhältnis der Seiten stehen, und dasselbe ist bei Dreiecken bewiesen worden, so dafs allgemein ähnliche geradlinige Figuren im quadratischen Verhältnis homologer Seiten stehen.

21.

Geradlinige Figuren, welche derselben Figur ähnlich sind, sind untereinander ähnlich (Fig. 21).

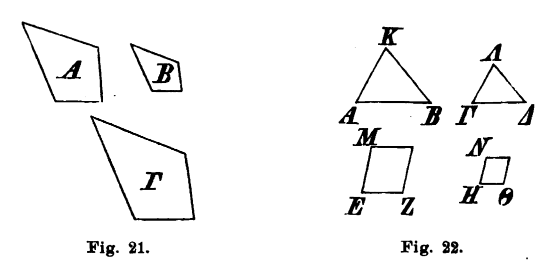


Fig. 21. Fig. 22.

22.

Wenn vier Strecken eine Proportion bilden, so bilden auch die auf ihnen ähnlich und ähnlich liegend entworfenen geradlinigen Figuren eine Proportion und umgekehrt.

(Fig. 22.) $AB, \Gamma\Delta, EZ, H\Theta$ die vier Strecken, so daſs $AB:\Gamma\Delta = EZ:H\Theta$ und auf AB und $\Gamma\Delta$ seien die ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren KAB und $\Lambda\Gamma\Delta$ entworfen und auf EZ und $H\Theta$ die ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren MZ und $N\Theta$.

Ξ sei die dritte Proportionale zu AB, $\Gamma\Delta$ und O zu EZ und $H\Theta$ (S. 11), alsdann ist (V, 22) $AB:\Xi = EZ:O$, und nach dem Zusatz zu 14 ist $AB:\Xi = KAB:\Lambda\Gamma\Delta$ und $EZ:O = MZ:N\Theta$ also

$$KAB:\Lambda\Gamma\Delta = MZ:N\Theta.$$

Umgekehrt, wenn $KAB:\Lambda\Gamma\Delta = MZ:NO$, ist

$$AB:\Gamma\Delta = EZ:H\Theta,$$

denn, wenn nicht, so sei $AB:\Gamma\Delta = EZ:\Pi P$. Über ΠP sei ähnlich und ähnlich liegend mit MZ entworfen ΣP, dann ist nach dem erwiesenen ersten Teil $KAB:\Lambda\Gamma\Delta = MZ:\Sigma P$, aber nach Voraussetzung $KAB:\Lambda\Gamma\Delta = MZ:N\Theta$, also $N\Theta = \Sigma P$ und da $N\Theta:\Sigma P = (H\Theta:\Pi P)^2$ (nach 20 und nach Zusatz zu 20) $= H\Theta^2:\Pi P^2$, so ist $H\Theta^2 = \Pi P^2$ und $H\Theta = \Pi P$.

Aus dem Beweise geht hervor, daſs der Wortlaut des Satzes zu eng ist, es ist unnötig, daſs die Figuren über AB und $\Gamma\Delta$ einerseits und über EZ und $H\Theta$, bezw. über AB und EZ, wie über $\Gamma\Delta$ und $H\Theta$ einander ähnlich und das Verhältnis der Maſsstäbe das gleiche.

Den Lehrsatz zu 22, der ganz überflüssig ist, da er aus 20 und dem Zusatz zu 20 und dem evidenten Satze, dafs, wenn zwei Quadrate gleich sind, ihre Seiten gleich sind, gefolgert wird, hat Rob. Simson aus sachlichen Gründen und Heiberg aus philol. (weil gegen den Gebrauch bei Euclid) verworfen.

23.

Gleichwinklige Parallelogramme haben zu einander ein Verhältnis, das aus dem der Seiten zusammengesetzt ist.

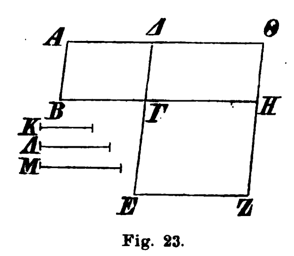


Fig. 23.

(Fig. 23.) Man ergänzt das Parallelogramm ΔH und nimmt [willkürlich] eine Strecke K an und bestimmt die Strecke Λ und M, so dafs

$$B\Gamma : \Gamma H = K : \Lambda \text{ und } \Delta\Gamma : \Gamma E = \Lambda : M.$$

$K : M$ heifst aus $K : \Lambda$ und $\Lambda : M$ zusammengesetzt, $K : \Lambda = B\Gamma : \Gamma H$ ist aber (S. 1) $= A\Gamma : \Gamma\Theta$ und $\Lambda : M = \Delta\Gamma : \Gamma E$ $= \Gamma\Theta : \Gamma Z$ also (δι' ἴσου (V, 22)) $K : M = A\Gamma : \Gamma Z$ w. z. b. w.

Der Satz ist keineswegs identisch mit unserem Satze: Das Verhältnis ... ist gleich dem der Produkte der die gleichen Winkel einschliefsenden Seiten. Wohl kommt die Zusammensetzung des Verhältnisses oder der Verhältnisse auf die Multiplikation der betreffenden Brüche hinaus, aber ehe nicht die Rechnung mit irrationalen Zahlen bezw. mit incommensurablen Gröfsen völlig begründet, darf von einer Multiplikation keine Rede sein. Die Definition 5 des sechsten Buches von Simson verworfen, von Heiberg desgleichen, ist schon rein sachlich für unecht zu erachten und die Erklärung, welche Lorenz und Mollweide nach dem Vorgang von Campanus, Galilei, Barrow und anderen giebt, fast sicher die Euclidische gewesen (so wie sie im Text in der gesperrten Stelle gegeben ist). Die Übersetzung von Heiberg $K : M = K : \Lambda.\ \ \Lambda : M$ ist daher hier entschieden zu tadeln, ebenso wie die betreffende Übersetzung in VIII, 5, mit VI, 23 die einzigen, wo in den Elementen von einem zusamengesetzten Verhältnisse die Rede ist; vgl. auch Pfleiderers Scholien § 195 u. ff.

24.

In jedem Parallelogramm sind die Parallelogramme um die Diagonale* (die Ergänzungsparallelogramme) herum sowohl dem ganzen als einander ähnlich.

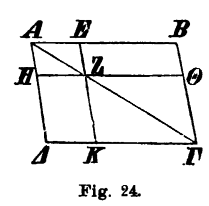


Fig. 24.

(Fig. 24.) $AB\Gamma\Delta$ das Parallelogramm, seine Diagonale $A\Gamma$, und die Parallelogramme um sie herum EH, ΘK. Nach S. 2 und V, 18 ist $BA : A\Delta = EA : AH$ und $A\Delta : \Delta\Gamma = AH : HZ$, $\Delta\Gamma : \Gamma B = HZ : ZE$, $\Gamma B : BA = ZE : EA$.

Der Ausdruck Diagonale bei Geminos-Heron Definition, bei Euclid heifst er „Diameter". περι mit Acc. „rings herum".

25.

Eine Figur zu konstruieren, welche zugleich einer gegebenen geradlinigen Figur ähnlich und einer anderen gegebenen [geradlinigen Figurenfläche] gleich ist.

(Fig. 25.) Es sei die erste Figur $AB\Gamma$, die flächengleiche Δ. An $AB\Gamma$ lege man das $AB\Gamma$ flächengleiche Parallelogramm BE und an ΓE in dem Winkel $Z\Gamma E$ das Δ gleiche Parallelogramm ΓM [I, 45], und es werde die mittlere Proportionale zu $B\Gamma$ und ΓZ konstruiert, $H\Theta$ und über $H\Theta$ das dem Dreieck $AB\Gamma$ ähnliche und ähnlich liegende $HK\Theta$ konstruiert (S. 18). [Beweis.] $B\Gamma : H\Theta = H\Theta : \Gamma Z$, also nach S. 19 Zus. $B\Gamma : \Gamma Z = AB\Gamma : KH\Theta$, aber $B\Gamma : \Gamma Z = BE : \Gamma M$ also $AB\Gamma : KH\Theta = BE : \Gamma M$; und da $AB\Gamma = BE$, so ist auch $KH\Theta = EZ = \Delta$.

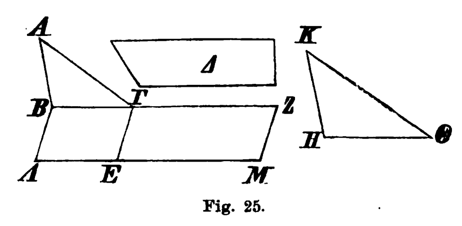


Fig. 25.

26.

Wenn von einem Parallelogramm ein Parallelogramm weggenommen wird, das dem ganzen ähnlich ist und ähnlich liegt und mit ihm einen gemeinsamen Winkel hat, so liegt es mit dem ganzen um dieselbe Diagonale herum.

(Fig. 26.) Beweis indirekt. $AB\Gamma\Delta$ das ganze, $AHZE$ das weggenommene; wenn Z nicht auf $A\Gamma$, so schneide HZ die Diagonale in Θ, so ist KH nach 24 ähnlich $A\Gamma$ und $\Delta A : AB = HA : AK$, also $AE = AK$.

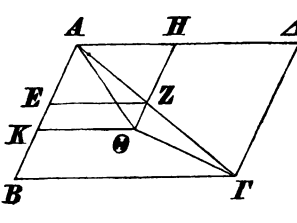


Fig. 26.

27.

Unter allen längs* einer gegebenen Strecke entworfenen Parallelogrammen, deren Ergänzungen einem Parallelogramme auf der halben Strecke ähnlich sind, ist das seiner Ergänzung* ähnliche Parallelogramm auf der halben Strecke das gröfste.

(Fig. 27.) AB die Strecke, die Mitte Γ, $A\Delta$ das Parallelogramm auf $A\Gamma$, das seiner Ergänzung*) ΓE ähnlich ist. AZ sei ein beliebiges Parallelogramm, so dafs die Ergänzung ZB der Figur ΔB ähnlich und ähnlich liegend. Behauptung: $A\Delta > AZ$.

Fig. 27.

Da $\Delta B \sim ZB$, so geht ΔB durch Z und man bringe ZK zum Schnitt mit ΔE und HZ zum Schnitt mit BE. Da $\Gamma Z = ZE$ als Ergänzungsparallelogramm (I, 43), so ist $\Gamma\Theta = KE$; aber $\Gamma\Theta = \Gamma H$, also $\Gamma H = KE$ und nach Addition von ΓZ ist $AZ =$ Gnomon*) AMN, d. h. gleich $\Gamma E - \Delta M$, also $AZ < \Delta B$, also $A\Delta > AZ$.

Satz 27 ist dadurch interessant, dafs er „die erste Maximums-Aufgabe enthält, welche in der Geschichte der Mathematik nachgewiesen ist“ (Cantor); die Fassung des Satzes ist sehr dunkel, aber der Beweis hellt sie auf; das Wort Gnomon fehlt in der Heibergschen Übersetzung mit Unrecht. Die Übersetzung von παρὰ mit dem Acc. mit „längs“ ist nötig, die Anlegung an AB selbst wird mit „ἀπὸ“ gegeben, doch steht auch gelegentlich statt dessen παρὰ c. Acc. „Ergänzung“ = ἐλλείπων Part. Präs. von ἐλλείπω ermangeln.

28.

Längs einer gegebenen Strecke ein einer gegebenen geradlinigen Figur Γ gleiches Parallelogramm zu konstruieren, dessen Ergänzung einem gegebenen Parallelogramm Δ ähnlich ist. Es darf aber die Figur Γ nicht gröfser sein, als das Parallelogramm auf der halben Strecke, dessen Ergänzung ähnlich Δ ist.

(Fig. 28.) AB die Strecke, die Mitte sei E, und von EB aus werde das Δ ähnliche und ähnlich liegende Viereck EZ (S. 18) konstruiert, und das Parallelogramm AH ergänzt. Ist $AH = \Gamma$, so ist das Geforderte bewirkt. Wenn nicht, so ist [Voraussetzung] $AH > \Gamma$. Aber $AH = BH$, also auch $BH > \Gamma$. Es werde ein Parallelogramm

$KΔMN$ konstruiert, dessen Fläche gleich $BH - Γ$ und das $Δ$ ähnlich und ähnlich liegend ist (S. 25); dann ist KM auch $\sim HB$, und da $HB > KM$ auch $HE > KΔ$ und $HZ > ΔM$. Macht man $HΞ = ΔK$ und $HO = ΔM$ und vervollständigt die Figur, so ist $HOΠΞ \simeq KΔMN$ und HB geht durch $Π$ und der Gnomon $ΥXΦ$ gleich $Γ$ und wie im vorigen Beweis gleich $TΣ$ und dessen Ergänzung $ΣP$ ist ähnlich (S. 24) $Δ$, also $TΣ$ das verlangte.

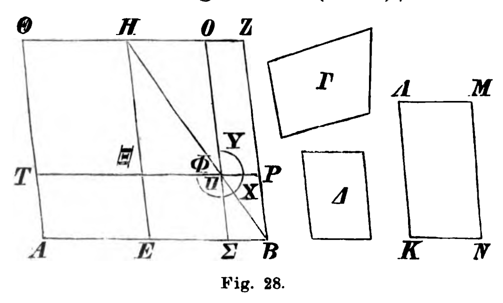


Fig. 28.

29.

Längs einer gegebenen Strecke ein Parallelogramm anzulegen, das einer gegebenen geradlinigen Figur $Γ$ gleich ist und dessen Überschufs* einem gegebenen Parallelogramm $Δ$ ähnlich ist.

(Fig. 29.) AB die gegebene Strecke, E die Mitte von AB, $EZΔB \sim Δ$, und $HΘ \sim Δ$ und $= BZ + Γ$ (S. 25), so dafs $KΘ$ entsprechend zu $ZΔ$ und KH zu ZE, dann, wie in Satz 28, KH auf ZE bis N und $KΘ$ auf $ZΔ$ bis M abgetragen, und die Figur vervollständigt, so geht $ZΞ$ durch B (26) und der Gnomon $ΨXΦ$ ist $= Γ$ und gleich dem Parallelogramm $AΞ$, dessen Überschufs $ΠO \sim Δ$ ist.

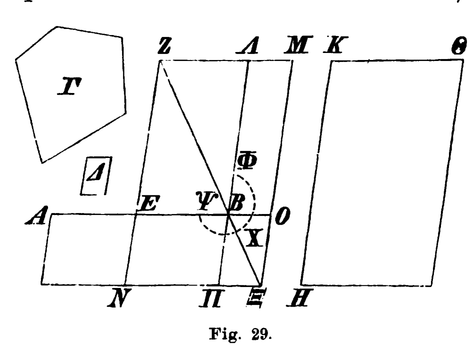


Fig. 29.

„Überschufs“ ὑβερβάλλον. In welchem engen Zusammenhange diese Sätze 27, 28, 29, (30) mit den drei Kegelschnitten und ihren Gleichungen stehen und dafs die Namen Parabel, Ellipse, Hyperbel, die Apollonius ihnen gab, aus diesen Sätzen herrühren, lese man bei Cantor, Bd. I, 1880, S. 248—252.

30.

Eine gegebene Strecke* nach stetigem Verhältnis* zu teilen.*

(Fig. 30.) AB die Strecke. Man beschreibe über AB das Quadrat $A\Gamma\Theta B$ und schreibe längs AB das Parallelogramm $\Gamma\Delta$, welches $B\Gamma$ flächengleich und dessen Überschuſs $A\Delta$ dem Quadrat $B\Gamma$ ähnlich, d. h. ein Quadrat (S. 29); dann ist AB in E stetig geteilt, denn da $A\Delta = ZB$, so ist nach 14 $ZE : E\Delta = AE : EB$ oder $AB : AE = AE : BE$.

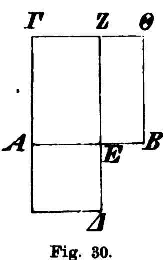


Fig. 30.

„Strecke" hier mal wieder durch „begrenzte Gerade" ausdrücklich hervorgehoben; statt „stetige Teilung" sagt Euclid „im ausgezeichneten und zugleich mittleren Verhältnis", Campanus sagt in einem Verhältnis, das ein Mittelglied und zwei äuſsere (oder End-) Glieder. Clavius sagt, wegen der vielen ausgezeichneten Anwendungen (worüber man die Abhandlung von Böttcher in den Lehrgängen und Lehrproben vergleiche) nennen die meisten Mathematiker diese Teilung die „göttliche". Daſs die Aufgabe mit der Aufgabe II, 11 identisch, wird nicht besonders ausgesprochen.

31.

Im rechtwinkligen Dreieck ist eine* Figur über der Hypotenuse gleich der Summe der ähnlich und ähnlich liegend über den Katheten* entworfenen.

(Fig. 31.) Man fälle das Lot $A\Delta$, dann sind die Dreiecke $B\Delta A$ und $A\Delta\Gamma$ unter sich und dem ganzen Dreieck $AB\Gamma$ ähnlich und folglich $\Gamma B : BA = AB : B\Delta$, und also nach Zusatz zu 19 die Figur über ΓB zu der über BA wie $\Gamma B : B\Delta$. Ebenso wird die Figur über ΓB zu der über ΓA wie $\Gamma B : \Gamma\Delta$. Folglich auch die Figur über ΓB zu der Summe der Figuren über AB und $A\Gamma$ wie $\Gamma B : B\Delta + \Delta\Gamma$. Und da $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma$, ist auch der Satz bewiesen.

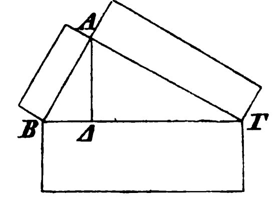


Fig. 31.

Daſs dieser Beweis und diese Verallgemeinerung des Pythagoras Eigentum des Euclid ist, ist von Proclus bezeugt; mit geringer Abänderung findet er sich als einer der modernsten Beweise des Pythagóras im Battaglini. Das Wort „Kathete" kommt bei Euclid noch nicht im heutigen Sinne vor.

32.

Wenn zwei Dreiecke $AB\Gamma$ und $\Delta\Gamma E$ zwei Seiten $BA, A\Gamma$ den Seiten $\Delta\Gamma, \Delta E$ proportional haben und sie in der Ecke

Γ zusammenstofsen und AB parallel $\Delta\Gamma$ und $A\Gamma$ parallel ΔE ist, so liegen $B\Gamma$ und ΓE in einer Geraden.

(Fig. 32.) Denn nach I, 29 sind die Wechselwinkel $BA\Gamma$ und $A\Gamma\Delta$ gleich und aus gleichem Grunde $\sphericalangle\, \Gamma\Delta E = A\Gamma\Delta$, also $\sphericalangle\, BA\Gamma = \Gamma\Delta E$, also die Dreiecke $AB\Gamma$ und $\Delta\Gamma E$ (S. 6) ähnlich, also $\sphericalangle\, AB\Gamma$ gleich $\Delta\Gamma E$, also $A\Gamma E = AB\Gamma + BA\Gamma$; auf beiden Seiten füge man $A\Gamma B$ hinzu, so ist $A\Gamma B + A\Gamma E = 2$ Rechten, also $B\Gamma$ und ΓE in derselben Geraden (I, 14).

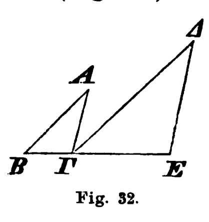


Fig. 32.

Es ist hierin zugleich bewiesen, dafs Winkel mit parallelen und gleichgerichteten Schenkeln gleich sind. Die Reihenfolge der Sätze ist auffallend. S. 31 gehört hinter S. 20 und S. 32 hinter die Ähnlichkeitssätze.

33.

In gleichen Kreisen haben die Peripheriewinkel wie die Zentriwinkel das Verhältnis der Bogen, auf denen sie stehen.

(Fig. 33.) Es seien $AB\Gamma$, ΔEZ die gleichen Kreise, und an den Zentren H und Θ die Winkel $BH\Gamma$ und $E\Theta Z$ und an den Peripherien die Winkel $BA\Gamma$ und $E\Delta Z$, so soll sein

$$\text{arc } B\Gamma : \text{arc } EZ = \sphericalangle\, BH\Gamma : E\Theta Z = BA\Gamma : E\Delta Z.$$

Es werden der Reihe nach die Lagen ΓK, $K\Lambda$ etc. dem Bogen $B\Gamma$ und die Bogen ZM, MN etc. dem Bogen EZ gleich gemacht und die Radien gezogen.

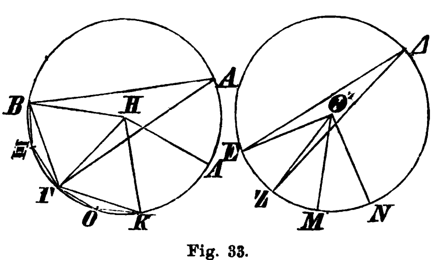


Fig. 33.

Nach III, 27 gehören zu gleichen Bogen gleiche Zentriwinkel. Also, das so Vielfache Bogen $B\Lambda$ von $B\Gamma$ ist, das ist $\sphericalangle\, BH\Lambda$ von $BH\Gamma$, und ebenso ist Bogen EN so vielmal Bogen EZ als Winkel $E\Theta N$ Winkel $E\Theta Z$. Wenn nun $B\Lambda \gtreqless EN$, so ist auch $\sphericalangle\, BH\Lambda \gtreqless \sphericalangle\, E\Theta N$, also nach Definition V, 5 arc $B\Gamma$: arc $EZ = \sphericalangle\, BH\Gamma : E\Theta Z$ und $= BA\Gamma : E\Delta Z$ (V, 15).

Der Beweis des Satzes 33, der den einzigen Versuch darstellt die Lehre von den Proportionen auf den Kreis zu übertragen, ist nicht unbedenklich, denn die Definition V, 5 verlangt die volle Variabilität von p und q mit der alleinigen Einschränkung, dafs es ganze Zahlen

seien, bei S. 1 ist diese Variabilität durch die Unendlichkeit der Geraden bezw. durch das zweite Postulat gesichert, aber die Ausdehnung des Kreises auf beliebig viele Windungen, bezw. die Erweiterung des Winkels über vier Rechte, ja sogar über zwei Rechte, fehlt.

Der Zusatz: „Die Sektoren verhalten sich wie ihre Bogen" gehört dem Theon an.

Mit dem sechsten Buche schliefsen die eigentlichen planimetrischen Bücher, wohl kommen noch einzelne planimetrische Sätze in den stereometrischen Büchern vor, wie z. B. die auf die stetige Teilung bezüglichen Sätze XIII, 1--12 und besonders die Sätze XII, 1 u. 2: Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser, die an und für sich hier ihre Stelle haben könnten, aber sie werden doch nur zum Zweck ihrer Verwendung für stereometrische Konstruktionen und Sätze gegeben.